Dom. Cien., ISSN: 2477-8818
Vol. 9, núm. 3. Julio-Septiembre, 2023, pp. 336-355

DOI: https://doi.org/10.23857/dc.v9i3.3446

Ciencias Técnicas y Aplicadas
Artículo de Investigación

Aplicación de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para la solución de problemas físicos

Application of first order ordinary differential equations to solve physical problems

Aplicação de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para resolver problemas físicos

Lidia Castro Cepeda [I]
lidia.castro@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-0471-2879

Fabián Bastidas Alarcón [II]
fabian.bastidas@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-3238-4072

Andrés Noguera Cundar [III]
andres.noguera@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-6763-9288

Christian Flores Arévalo [IV]
giovanni.flores@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-0132-8326

Correspondencia: lidia.castro@espoch.edu.ec

***Recibido:** 29 de mayo de 2023 ***Aceptado:** 12 de junio de 2023 *** Publicado:** 11 de julio de 2023

I. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Grupo de Investigación GIDETER, Ecuador
II. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Grupo de Investigación GISAI, Ecuador.
III. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Grupo de Investigación GISAI, Ecuador.
IV. Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Grupo de Investigación GISAI, Ecuador.

Resumen

La presente investigación tiene por objeto explicar y entender como las EDO son herramientas matemáticas utilizadas para describir el cambio de una función en relación con su variable independiente. En el contexto de la física, estas ecuaciones son fundamentales para modelar fenómenos que involucran el cambio o la interacción de magnitudes físicas. En general, el proceso de aplicación de las EDO en la resolución de problemas físicos sigue estos pasos: Identificación del fenómeno físico: Lo primero es identificar el fenómeno físico que se desea modelar. Esto puede ser, por ejemplo, el movimiento de un objeto, la propagación de una onda, el decaimiento de una sustancia radioactiva, etc. Luego la formulación del problema: A partir del fenómeno identificado, se establecen las variables relevantes y se plantean las condiciones iniciales y las condiciones de contorno necesarias para resolver el problema. Estas condiciones proporcionan información sobre el estado inicial del sistema y las restricciones que se deben cumplir. Se realiza el modelado matemático: En esta etapa, se traduce el problema físico en un modelo matemático basado en ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto implica establecer relaciones entre las variables involucradas y expresar cómo cambian en función del tiempo u otra variable independiente. Finalmente se debe realizar la resolución de la EDO: Una vez formuladas las ecuaciones diferenciales, se procede a resolverlas. La solución puede ser analítica o numérica, dependiendo de la complejidad de las ecuaciones y la disponibilidad de métodos de resolución exactos. Los métodos numéricos, como el método de Euler o el método de Runge-Kutta, son comúnmente utilizados para resolver EDO en casos más complicados. Para finalizar completamente el sistema se debe realizar la interpretación y análisis de la solución analizando el contexto físico. Esto implica extraer conclusiones sobre el comportamiento de las variables, realizar predicciones o comparar los resultados con datos experimentales, si están disponibles. En resumen, las ecuaciones diferenciales ordinarias se aplican en la física para describir y resolver problemas que involucran cambios y relaciones entre variables físicas. Su aplicación implica la formulación del problema, el modelado matemático, la resolución de las EDO y la interpretación de los resultados obtenidos.

Palabras Claves: Edo; Modelo Matemático; Problema Físico; Interpretación Numérica; Solución Analítica; Solución Numérica.

Abstract

The purpose of this research is to explain and understand how ODEs are mathematical tools used to describe the change of a function in relation to its independent variable. In the context of physics, these equations are essential to model phenomena that involve the change or interaction of physical magnitudes. In general, the process of applying ODEs in solving physical problems follows these steps: Identification of the physical phenomenon: The first thing to do is to identify the physical phenomenon to be modeled. This can be, for example, the movement of an object, the propagation of a wave, the decay of a radioactive substance, etc. Then the formulation of the problem: From the identified phenomenon, the relevant variables are established and the initial conditions and the boundary conditions necessary to solve the problem are proposed. These conditions provide information about the initial state of the system and the constraints that must be met. Mathematical modeling is performed: In this stage, the physical problem is translated into a mathematical model based on ordinary differential equations. This involves establishing relationships between the variables involved and expressing how they change as a function of time or another independent variable. Finally, the resolution of the ODE must be carried out: Once the differential equations have been formulated, we proceed to solve them. The solution can be analytical or numerical, depending on the complexity of the equations and the availability of exact resolution methods. Numerical methods, such as the Euler method or the Runge-Kutta method, are commonly used to solve ODE in more complicated cases. To completely finalize the system, the interpretation and analysis of the solution must be carried out, analyzing the physical context. This involves drawing conclusions about the behavior of the variables, making predictions, or comparing the results with experimental data, if available. In short, ordinary differential equations are applied in physics to describe and solve problems involving changes and relationships between physical variables. Its application involves the formulation of the problem, the mathematical modeling, the resolution of the ODEs and the interpretation of the results obtained.

Keywords: Edo; Mathematical model; Physical problem; Numerical interpretation; Analytical Solution; Numerical Solution.

Resumo

O objetivo desta pesquisa é explicar e entender como as EDOs são ferramentas matemáticas usadas para descrever a mudança de uma função em relação à sua variável independente. No contexto da física, essas equações são essenciais para modelar fenômenos que envolvem a mudança ou interação de grandezas físicas. Em geral, o processo de aplicação de EDOs na resolução de problemas físicos segue as seguintes etapas: Identificação do fenômeno físico: A primeira coisa a ser feita é identificar o fenômeno físico a ser modelado. Isso pode ser, por exemplo, o movimento de um objeto, a propagação de uma onda, o decaimento de uma substância radioativa, etc. Em seguida, a formulação do problema: A partir do fenômeno identificado, são estabelecidas as variáveis relevantes e são propostas as condições iniciais e as condições de contorno necessárias para resolver o problema. Essas condições fornecem informações sobre o estado inicial do sistema e as restrições que devem ser atendidas. A modelagem matemática é realizada: Nesta etapa, o problema físico é traduzido em um modelo matemático baseado em equações diferenciais ordinárias. Isso envolve estabelecer relações entre as variáveis envolvidas e expressar como elas mudam em função do tempo ou de outra variável independente. Por fim, deve-se realizar a resolução da EDO: Uma vez formuladas as equações diferenciais, passamos a resolvê-las. A solução pode ser analítica ou numérica, dependendo da complexidade das equações e da disponibilidade de métodos de resolução exatos. Métodos numéricos, como o método de Euler ou o método de Runge-Kutta, são comumente usados para resolver EDO em casos mais complicados. Para finalizar completamente o sistema, deve-se realizar a interpretação e análise da solução, analisando o contexto físico. Isso envolve tirar conclusões sobre o comportamento das variáveis, fazer previsões ou comparar os resultados com dados experimentais, se disponíveis. Em suma, as equações diferenciais ordinárias são aplicadas na física para descrever e resolver problemas envolvendo mudanças e relações entre variáveis físicas. Sua aplicação envolve a formulação do problema, a modelagem matemática, a resolução das EDOs e a interpretação dos resultados obtidos..

Palavras-chave: Edo; Modelo matemático; Problema físico; Interpretação numérica; Solução Analítica; Solução Numérica.

Introducción

Las ecuaciones diferenciales son ampliamente reconocidas como una herramienta matemática versátil para resolver una variedad de problemas debido a su amplio rango de aplicaciones. Para utilizarlas con éxito, es necesario que los estudiantes sean capaces de reconocer, clasificar, aplicar y analizar ecuaciones diferenciales ordinarias a un nivel básico. También deben desarrollar habilidades para relacionar estas ecuaciones con problemas del mundo real que requieren una aplicación práctica en campos como la física, química, biología, economía o ingeniería. Este enfoque fortalece las bases matemáticas y permite comprender la conexión entre los conocimientos teóricos adquiridos y su aplicación práctica. Además, es importante que los estudiantes adquieran los conocimientos necesarios para situar las ecuaciones diferenciales en su contexto teórico, estimar su complejidad y dominar algunos métodos para abordar su resolución. Por lo tanto, este material se presenta con el propósito de contribuir a la resolución de problemas físicos a través de la aplicación de ecuaciones diferenciales ordinarias. [1]

Las ecuaciones diferenciales desempeñan un papel fundamental en la solución de problemas reales en una amplia gama de campos. A continuación, se identifican algunas razones que destacan su importancia:

1. ***Modelado de fenómenos naturales:*** Las ecuaciones diferenciales permiten describir y modelar fenómenos naturales y procesos físicos en términos matemáticos. Por ejemplo, el movimiento de los cuerpos en el espacio, el comportamiento de los circuitos eléctricos, la propagación de ondas, la difusión de sustancias químicas, entre otros, se pueden representar y comprender a través de ecuaciones diferenciales.

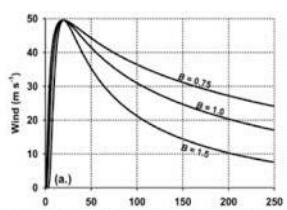

Figura 1. Modelo matemático de la velocidad del viento

Fuente: https://encrypted-tbn0.gstatic.com [2]

2. ***Predicción y control de sistemas dinámicos:*** Muchos sistemas en la ciencia y la ingeniería son dinámicos, es decir, cambian con el tiempo. Las ecuaciones diferenciales permiten modelar estos sistemas y predecir su comportamiento futuro. Esto es esencial para optimizar el diseño de estructuras, controlar procesos industriales, simular el clima y el medio ambiente, entre otros aspectos.

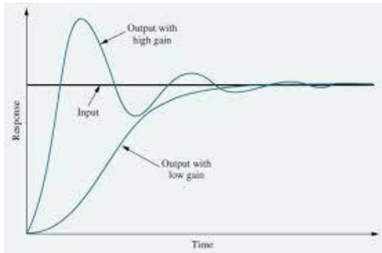

Figura 2. Modelo matemático sistema dinámico

Fuente: https://dademuch.com [3]

3. ***Análisis de estabilidad y equilibrio:*** Las ecuaciones diferenciales también son utilizadas para analizar la estabilidad y los puntos de equilibrio de los sistemas. Esto es relevante para comprender cómo los sistemas naturales y artificiales evolucionan con el tiempo y cómo responderán a perturbaciones externas.

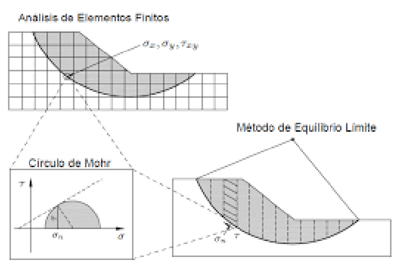

Figura 3. Análisis de estabilidad de pendientes

Fuente: Estabilidad de pendientes [4]

4. ***Desarrollo de tecnología y avances científicos:*** Muchos avances científicos y tecnológicos se basan en la comprensión y el desarrollo de ecuaciones diferenciales. El diseño de vehículos espaciales, la optimización de procesos industriales, el modelado de sistemas biológicos y la predicción del comportamiento de materiales, por ejemplo, dependen del uso de ecuaciones diferenciales en su análisis y desarrollo.

5. ***Resolución de problemas de ingeniería:*** Las ecuaciones diferenciales son esenciales para resolver problemas de ingeniería. Permiten determinar el comportamiento de estructuras, analizar circuitos eléctricos y electrónicos, diseñar sistemas de control, simular y optimizar procesos industriales, entre otras aplicaciones clave.

En resumen, las ecuaciones diferenciales son herramientas matemáticas poderosas y versátiles que desempeñan un papel crucial en la solución de problemas reales en diversos campos científicos y de ingeniería. Su aplicación permite comprender y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos, modelar fenómenos naturales, analizar la estabilidad y equilibrio de sistemas, y promover el avance científico y tecnológico. [5]

Las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias en el campo de la ingeniería son muy amplias y abarcan diversas disciplinas

Mecánica y dinámica de cuerpos: Las ecuaciones diferenciales ordinarias se utilizan para describir y predecir el movimiento y la dinámica de cuerpos en ingeniería mecánica. Por ejemplo, en el diseño de sistemas de suspensión de automóviles, se utilizan ecuaciones diferenciales para modelar el comportamiento del sistema frente a baches o maniobras. También se aplican en la dinámica de fluidos para analizar el flujo de fluidos alrededor de objetos y calcular fuerzas y presiones.

Electromagnetismo y circuitos eléctricos: Las ecuaciones diferenciales son fundamentales en la teoría del electromagnetismo y en el análisis de circuitos eléctricos. Se utilizan para describir el comportamiento de campos electromagnéticos y la interacción de corrientes y voltajes en circuitos eléctricos. Esto permite diseñar y optimizar dispositivos electrónicos, sistemas de comunicación y redes eléctricas.

Ingeniería de control: Las ecuaciones diferenciales son esenciales en el diseño y análisis de sistemas de control. Se utilizan para describir la dinámica de sistemas controlados y desarrollar controladores que permitan regular y estabilizar su comportamiento. Esto se aplica en sistemas industriales, automóviles autónomos, robots, entre otros.

Ingeniería estructural y mecánica de materiales: En la ingeniería estructural, las ecuaciones diferenciales se utilizan para analizar la respuesta y el comportamiento de estructuras sometidas a cargas, como puentes, edificios o aviones. También se aplican en la mecánica de materiales para estudiar la deformación y el flujo de esfuerzos en materiales sólidos, lo cual es importante para el diseño de materiales y componentes estructurales.

Ingeniería ambiental y de recursos: Las ecuaciones diferenciales se utilizan en la modelización y simulación de fenómenos ambientales, como la dispersión de contaminantes en el aire o el flujo de agua en acuíferos. Esto es crucial para la gestión de recursos hídricos, la evaluación del impacto ambiental y la planificación de infraestructuras relacionadas con el medio ambiente.

Estos son solo algunos ejemplos de cómo las ecuaciones diferenciales ordinarias se aplican en el desarrollo de la ingeniería. Su uso permite modelar, analizar y diseñar sistemas complejos, contribuyendo así al avance y la innovación en diversos campos de la ingeniería. [6]

Esta investigación se desarrolla para acercar a los estudiantes al uso de las EDO conociendo la dificultad que se presenta en su interpretación y análisis. Se considera que comprender e interpretar las soluciones de ecuaciones diferenciales, tanto en forma gráfica como algebraica, es un objetivo fundamental en un curso de ecuaciones diferenciales. Para lograr esto, es importante reflexionar sobre los desafíos que enfrentan los estudiantes al resolver ecuaciones diferenciales que modelan fenómenos de diversas naturalezas. Desde esta perspectiva, se plantean varias preguntas: ¿qué conocimientos previos de cálculo diferencial utilizan los estudiantes?, ¿cómo interpretan los estudiantes las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria cuando se presentan gráficamente?, ¿hay alguna diferencia en la interpretación cuando la solución se expresa algebraicamente?, ¿qué papel puede desempeñar un software específico en la interpretación que hacen los estudiantes?

El objetivo principal de este trabajo de investigación es, en primer lugar, identificar y clasificar las ecuaciones diferenciales haciendo énfasis en las dificultades que enfrentan los estudiantes al resolver los problemas que modelan un fenómeno particular. En segundo lugar, se pretende estudiar el papel que desempeña el registro gráfico en la aparición de esas dificultades al interpretar las soluciones y los campos de direcciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias. [7]

A continuación, se presenta la clasificación de las ecuaciones diferenciales de forma rápida y resumida con el fin de que los estudiantes pueden tomar este artículo como fuente de información resumida.

Definición y clasificación de la edo ordinarias

Definición de EDO: Se llama ecuación diferencial aquella que liga la variable independiente x y la función incógnita y, sus derivadas y’, y’’, $y^{(n)}$. En otras palabras y de forma sencilla es aquella ecuación que contiene derivadas. Cuando se trata de una sola variable independiente se considera una ecuación diferencial ordinaria. [8]

Ejemplo:

$$(y'')^2 + (y')^5 + 3y = x^2$$

Clasificación de la EDO:

Las ecuaciones diferenciales se clasifican según su orden y grado de la ecuación diferenciales de ahí que se tiene:

1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: Son aquellas cuya máxima derivada es la de primer orden como lo indica su nombre como se puede observar en el siguiente ejemplo:

$$y' + y + 5 = tan\ x$$

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias de órdenes superiores: Son aquellas ecuaciones diferenciales cuya derivada mayor puede ir desde un orden 2 hasta un orden n-ésimo como se puede observar en los siguientes ejemplos:

$$y''' + 3y'' + 5y'' + 6y = cos\ 2x$$

Cada una de ellas pueden estar elevadas a diferente grado con lo que se pueden tener ecuaciones diferenciales de cualquier orden y grado, en este artículo científico se definirá ecuaciones diferenciales sencillas que permitan entender su solución en la aplicación de los problemas físicos.

Tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden

1. **Ecuaciones diferenciales en variable separable**

Son ecuaciones del tipo:

$$y' = f(x)g(y)$$

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

$$f(x)g(y)dx + f_1(x)g_1(y)dy = 0$$

Para resolver se debe despejar la variable con su diferencial e integrar de forma inmediata.

2. **Ecuaciones diferenciales que pueden convertirse en variables separables**

Son ecuaciones que tienen la siguiente forma:

$$y' = f(ax + by + c)$$

Para resolver se debe realizar la siguiente sustitución:

$$u = ax + by + c$$

Y se reduce a una ecuación en variable separable siguiendo el procedimiento anterior.

3. **Ecuaciones diferenciales homogéneas**

Es una ecuación diferencial que tiene la siguiente forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Por regla general se identifica que es homogénea si las funciones M y N tiene el mismo grado. Para su solución se puede aplicar las siguientes sustituciones:

$$y = ux$$

$$x = uy$$

Con sus respectivas derivadas de forma que conduce a obtener una ecuación diferencial en variable separable.

4. Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas

Son ecuaciones diferenciales que tienen la forma:

$$y' = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}$$

Para ello se analiza la intersección entre las dos rectas y se calcula su determinante, llamado normalmente λ.

Si $\lambda = 0$, se utiliza la sustitución $u = a_1x + b_1y + c_1$ y se reduce a una ecuación en variable separable.

Si $\lambda \neq 0$, se utiliza la sustitución $x = u + a, \quad y = v + \beta$ y se reduce a una ecuación homogénea, en términos de las nuevas variables u y v, por lo que se considera el proceso anterior para su solución.

5. Ecuaciones diferenciales exactas

Son ecuaciones conocidas como ecuaciones en diferenciales totales, y tiene la forma:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Pero que debe cumplir la siguiente con la condición:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Para su solución se debe usar la siguiente fórmula general:

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

6. Ecuaciones diferenciales reducibles a exactas

Cuando las ecuaciones no cumplen con la condición de ser exactas, se pueden convertir o reducir a exactas a través de multiplicar la EDO por un factor integrante para ello se puede realizar las siguientes fórmulas:

$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$, entonces $u = u(x)$

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = F_1(y), \text{entonces } u = u(y)$$

Al multiplicar por el factor integrante se obtiene una ecuación exacta y se resuelve utilizando el proceso anterior.

7. Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación diferencial lineal de primer grado tiene forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

Donde las funciones P y Q depende de una sola variable, se sugiere convertir a la forma canónica con el fin de continuar el proceso.

Para encontrar la solución se puede utilizar el método de variación de parámetro aplicando la siguiente la ecuación:

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$$

Considerando a C una función de x indeterminada que se deberá encontrar a través de sustituciones sucesivas.

Adicionalmente para resolver estas mismas ecuaciones se puede recurrir al método de sustitución usando la siguiente ecuación:

$$y = uv$$

8. Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Es una variación de la ecuación lineal que se establece de la siguiente forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Se puede resolver utilizando la sustitución directa:

$$y = uv$$

O se puede utilizar una sustitución alternativa que permitirá reducir a una ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$z = y^{1-\alpha}$$

9. Ecuaciones diferenciales de Ricatti

Al igual que la ecuación anterior es una variación de la ecuación lineal con diferentes aplicaciones, se puede observar a continuación:

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$$

Donde P, Q y R son funciones de una sola variable para este caso x. Para resolver es necesario conocer la solución particular y su solución general será:

$$y = y_p + u$$

Se deriva y sustituye en la ecuación original para encontrar su solución.

Tipo de problemas físicos y soluciones

Para realizar el análisis de los problemas físicos que se resuelven a través de ecuaciones es necesario dividir los tópicos en diferentes temas de acuerdo con la aplicación propia para las distintas ramas de la ciencia.

Problemas químicos

Resolver un proceso primario que sigue una ley de crecimiento o decaimiento implica utilizar ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Estas ecuaciones describen cómo cambia una variable en función del tiempo y se resuelven encontrando una función que satisfaga la ecuación diferencial. [9]

Para ilustrar el proceso, se va a tomar el ejemplo de un proceso de crecimiento exponencial, donde una cantidad aumenta proporcionalmente a su valor actual en cada instante de tiempo. La ecuación diferencial que describe este proceso es:

$$\frac{dy}{dt} = k\, y$$

Donde:

- dy/dt es la tasa de cambio de la variable y con respecto al tiempo t.
- k es la constante de proporcionalidad que determina la velocidad de crecimiento.
- y es la variable que estamos estudiando, que representa la cantidad en cada instante de tiempo.

Para resolver esta ecuación, se puede utilizar varios métodos. Uno de los más comunes es el método de separación de variables. La idea principal es separar las variables y y t en lados opuestos de la ecuación y luego integrar ambos lados.

El resultado final es una solución general que describe el crecimiento exponencial de la variable y en función del tiempo t. La constante k determina la tasa de crecimiento, mientras que la constante C representa la condición inicial, es decir, el valor de y en un momento específico.

Si se trata de un proceso de decaimiento, la ecuación diferencial tendría la misma forma, pero con un coeficiente negativo en lugar de positivo:

$$\frac{dy}{dt} = -\, k\, y$$

El procedimiento para resolverla sería similar al anterior, pero con un cambio de signo en las constantes resultantes.[10]

Es importante destacar que existen otros métodos y técnicas para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, como los métodos numéricos o la aplicación de condiciones iniciales específicas. Además, estos métodos también se pueden utilizar para resolver otros tipos de procesos primarios más complejos, ajustando la forma de la ecuación diferencial en consecuencia.[11]

Para resolver un proceso de segundo orden, como una reacción química, a través de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, es necesario descomponer la ecuación de segundo orden en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este proceso se conoce como linealización.

Para eso se supondrá que se tiene una reacción química de segundo orden de la forma:

A + B → C

Donde A y B son los reactivos, y C es el producto. La velocidad de reacción de esta reacción química puede expresarse como:

$$\frac{d(C)}{dt} = kAB$$

Donde:

- d[C]/dt es la tasa de cambio de la concentración de C con respecto al tiempo t.
- k es la constante de velocidad de la reacción.
- [A] y [B] son las concentraciones de A y B, respectivamente.

Para resolver esta ecuación, es necesario introducir variables adicionales para las concentraciones de A y B. Sea x = [A], y = [B]. Entonces, la ecuación diferencial de segundo orden se puede descomponer en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx}{dt} = -kxy$$

$$\frac{dy}{dt} = -kxy$$

$$\frac{dz}{dt} = kxy$$

Donde z = [C].

Ahora se tiene un sistema de tres ecuaciones diferenciales de primer orden. Podemos resolver este sistema utilizando métodos estándar para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Un enfoque común es el método de Euler o métodos más avanzados como el método de Runge-Kutta. Estos métodos implican discretizar el tiempo y utilizar aproximaciones para las derivadas. Se ha colocado un ejemplo utilizando el método de Euler:

- Definir las condiciones iniciales: x(0) = x0, y(0) = y0, z(0) = z0.
- Elegir un paso de tiempo h.

Para cada paso de tiempo n

Calcular las tasas de cambio en el tiempo actual. Actualizar las concentraciones en el siguiente paso de tiempo:

$$x(n+1) = x(n) + h * (dx/dt)$$
$$x(n+1) = x(n) + h * (dx/dt)$$
$$y(n+1) = y(n) + h * (dy/dt)$$
$$z(n+1) = z(n) + h * (dz/dt)$$

Repetir el paso 3 hasta alcanzar el tiempo final deseado. Este método numérico proporciona una aproximación de las concentraciones x, y y z en cada instante de tiempo. Cuanto más pequeño sea el paso de tiempo h, mayor será la precisión de la aproximación.[12]

Es importante tener en cuenta que este es solo un ejemplo de cómo resolver un proceso de segundo orden, y los detalles exactos pueden variar según la reacción química específica y la forma de las ecuaciones diferenciales resultantes.[13]

Problemas biológicos

Para resolver un proceso biológico a través de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, necesitamos establecer un modelo matemático que describa el sistema biológico en cuestión. El modelo se puede representar mediante variables y parámetros que representen las diferentes cantidades biológicas involucradas y sus interacciones.

A continuación, se presenta un ejemplo general de cómo resolver un proceso biológico utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

- Identificar las variables: Identifica las variables que son relevantes para el proceso biológico que deseas modelar. Por ejemplo, si estás estudiando el crecimiento de una población de bacterias, podrías considerar la variable N para representar la cantidad de bacterias en un momento dado.
- Establecer las interacciones: Determina cómo interactúan las variables entre sí. Esto implica identificar las tasas de cambio de las variables en función de las otras variables y los parámetros relevantes. Por ejemplo, si estás modelando el crecimiento bacteriano, podrías

establecer que la tasa de cambio de N con respecto al tiempo está relacionada con la tasa de crecimiento y la tasa de muerte de las bacterias.

- Formular las ecuaciones diferenciales: Una vez que hayas identificado las interacciones, puedes escribir las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen el sistema biológico. Utilizando el ejemplo del crecimiento bacteriano, una posible ecuación diferencial sería:[14]

$$dN/dt = r\,N - d\,N$$

Donde:

- dN/dt es la tasa de cambio de la población de bacterias N con respecto al tiempo t.
- r es la tasa de crecimiento de las bacterias
- d es la tasa de muerte de las bacterias.

Resolver las ecuaciones diferenciales: Una vez que tengas tus ecuaciones diferenciales, puedes resolverlas utilizando métodos numéricos o técnicas analíticas, dependiendo de la complejidad del sistema y la disponibilidad de soluciones exactas. Para ecuaciones diferenciales de primer orden como la mencionada anteriormente, los métodos numéricos comunes incluyen el método de Euler o métodos más precisos como el método de Runge-Kutta.[15]

Proceso de ley de enfriamiento de newton

El proceso de ley de enfriamiento de Newton describe cómo cambia la temperatura de un objeto en función de la diferencia de temperatura entre el objeto y el entorno circundante. Podemos resolver este proceso utilizando una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.[16]

La ecuación diferencial que describe la ley de enfriamiento de Newton es:

$dT/dt = -k * (T - T0)$

Donde:

- dT/dt es la tasa de cambio de la temperatura T con respecto al tiempo t.
- k es el coeficiente de enfriamiento, que depende de las características del objeto y del entorno.
- T es la temperatura del objeto en cada instante de tiempo.
- T0 es la temperatura del entorno circundante.

Para resolver esta ecuación diferencial, se puede utilizar métodos estándar para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

El resultado final es una solución general que describe cómo cambia la temperatura del objeto en función del tiempo. La constante k determina la rapidez con la que el objeto se enfría, mientras que la constante C representa la temperatura inicial del objeto en relación con la temperatura del entorno. Es importante tener en cuenta que este enfoque asume que el coeficiente de enfriamiento k es constante. En algunos casos, el coeficiente de enfriamiento puede variar con la temperatura, lo que requeriría una formulación más compleja del problema y un enfoque diferente para resolver la ecuación diferencial.

Circuitos eléctricos

Para resolver un circuito eléctrico utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, necesitamos establecer un modelo matemático que describa el comportamiento del circuito. El modelo se basará en las leyes fundamentales de la electricidad, como la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff.[17]

A continuación, se presenta un ejemplo general de cómo resolver un circuito eléctrico utilizando ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

- Identificar las variables: Identifica las variables eléctricas que son relevantes para el circuito que deseas resolver. Por ejemplo, podrías considerar la corriente (I) y el voltaje (V) en los diferentes componentes del circuito.
- Establecer las relaciones: Utiliza las leyes fundamentales de la electricidad, como la ley de Ohm y las leyes de Kirchhoff, para establecer las relaciones entre las variables eléctricas. Por ejemplo, la ley de Ohm establece que la corriente a través de un resistor es igual al voltaje dividido por la resistencia (I = V/R).
- Formular las ecuaciones diferenciales: Una vez que hayas establecido las relaciones entre las variables, puedes escribir las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que describen el circuito. Por ejemplo, si tienes un circuito con un resistor y un capacitor, la ecuación diferencial que describe la carga del capacitor podría ser:[18]

$$dQ/dt = (V - Q/C)\,/\,R$$

Donde:

- dQ/dt es la tasa de cambio de la carga (Q) del capacitor con respecto al tiempo (t).
- V es el voltaje aplicado al circuito.

- C es la capacitancia del capacitor.
- R es la resistencia del resistor.

Resolver las ecuaciones diferenciales: Una vez que tengas tus ecuaciones diferenciales, se pueden resolver utilizando métodos numéricos o técnicas analíticas, dependiendo de la complejidad del circuito y la disponibilidad de soluciones exactas. Para ecuaciones diferenciales de primer orden como la mencionada anteriormente, los métodos numéricos comunes incluyen el método de Euler o métodos más precisos como el método de Runge-Kutta.

Estos métodos numéricos implican discretizar el tiempo y calcular las tasas de cambio en cada paso de tiempo para actualizar las variables. Esto se realiza iterativamente hasta alcanzar el tiempo final deseado. Cuanto más pequeño sea el paso de tiempo, mayor será la precisión de la aproximación.

Es importante tener en cuenta que la resolución de un circuito eléctrico a través de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden puede requerir considerar múltiples componentes y variables en función de la complejidad del circuito. Además, pueden surgir situaciones más complejas cuando se agregan elementos como inductores, fuentes de voltaje variables o circuitos no lineales, lo que puede requerir métodos más avanzados o técnicas de simulación para obtener soluciones precisas.

Discusión y conclusiones

Modelado matemático: Las ecuaciones diferenciales ordinarias proporcionan un marco matemático poderoso para modelar y describir una amplia variedad de fenómenos físicos. Desde el movimiento de partículas y cuerpos en el espacio, hasta procesos de crecimiento, decaimiento, reacciones químicas y sistemas eléctricos, las ecuaciones diferenciales son fundamentales para formular y resolver problemas físicos.

Relaciones entre variables: Las ecuaciones diferenciales permiten establecer las relaciones entre las variables involucradas en un problema físico. Estas relaciones capturan las tasas de cambio y las interacciones entre las variables, lo que brinda una comprensión más profunda del fenómeno en estudio.

Soluciones analíticas y numéricas: Las ecuaciones diferenciales pueden resolverse de manera analítica, lo que proporciona soluciones exactas en forma de funciones matemáticas. Sin embargo, en muchos casos, las soluciones analíticas no son posibles o demasiado complejas, por lo que se recurre a métodos numéricos para obtener aproximaciones de las soluciones. Los métodos numéricos, como el método de Euler o el método de Runge-Kutta, permiten resolver ecuaciones diferenciales de manera eficiente y obtener soluciones aproximadas con una precisión deseada.

Estudio de comportamientos: Las ecuaciones diferenciales permiten analizar y comprender el comportamiento de los sistemas físicos a lo largo del tiempo. Pueden revelar información sobre el crecimiento, el decaimiento, los puntos de equilibrio, las oscilaciones, las estabilidades y otros aspectos dinámicos de los sistemas estudiados.

Herramienta fundamental en la física y otras disciplinas científicas: Las ecuaciones diferenciales ordinarias son una herramienta esencial en la física y muchas otras disciplinas científicas. Proporcionan un marco teórico sólido para abordar problemas complejos y resolverlos de manera sistemática. Además, las soluciones obtenidas a partir de ecuaciones diferenciales pueden compararse con datos experimentales, lo que permite validar y ajustar los modelos teóricos.

En resumen, las ecuaciones diferenciales ordinarias son una herramienta fundamental en la resolución de problemas físicos. Proporcionan un lenguaje matemático para describir fenómenos físicos, establecer relaciones entre variables y estudiar el comportamiento de los sistemas a lo largo del tiempo. Tanto las soluciones analíticas como las numéricas de las ecuaciones diferenciales permiten obtener información valiosa sobre los sistemas físicos y validar los modelos teóricos.

Referencias

A. C. M. R. F. C. Sucuacueche, "RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS QUE CONDUCE A ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS MEDIANTE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE EN LAS CARRERAS UNIVERSITARIAS DE ANGOLA", Accessed: Jul. 05, 2023. [Online]. Available: chrome-extension://dagcmkpagjlhakfdhnbomgmjdpkdklff/enhanced-reader.html?pdf=http%3A%2F%2Fwww.hms.harvard.edu%2Fbss%2Fneuro%2Fbornlab%2Fnb204%2Fstatistics%2Fbootstrap.pdf

"images (Imagen JPEG, 286 × 176 píxeles)." https://encrypted-tbn0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSK8FvSWh8Q8KEjbYyyhxoi_NDnSZD20OOFvw&usqp=CAU (accessed Jul. 05, 2023).

"Los sistemas de control son sistemas dinámicos." https://dademuch.com/2016/07/22/los-sistemas-de-control-son-sistemas-dinamicos/ (accessed Jul. 05, 2023).

J. Bojorque, "Métodos para el análisis de la estabilidad de pendientes," Maskana, vol. 2, no. 2, pp. 1–16, 2011, doi: 10.18537/mskn.02.02.01.

K. Lee and E. J. Parish, "Parameterized neural ordinary differential equations: Applications to computational physics problems," Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 477, no. 2253, 2021, doi: 10.1098/rspa.2021.0162.

D. D. M. Oyola De Los Rios and P. L. Parraguéz Castro, "Ecuaciones diferenciales ordinarias en la solución de problemas de oferta y demanda asistidos con Matlab," 2020, Accessed: Jul. 05, 2023. [Online]. Available: http://repositorio.unprg.edu.pe/handle/20.500.12893/8884

C. Guerrero Ortiz, M. Camacho Machín, and H. R. Mejía Velasco, "Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema," Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, vol. 28, no. 3, pp. 341–352, 2011, doi: 10.5565/rev/ec/v28n3.431.

Lidia. C. Cepeda, ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS TEORÍA Y EJERCICIOS RESUELTOS.

D. R. Tobergte and S. Curtis, "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones," J Chem Inf Model, vol. 53, no. 9, pp. 1689–1699, 2013.

D. G. Zill and M. R. Cullen, Ecuaciones diferenciales. McGraw-Hill Interamericana, 2013.

M. Vergel Ortega, O. L. Rincón Leal, and E. Ibarguen Mondragón, “Ecuaciones diferenciales y aplicaciones,” 2022.

D. Gutiérrez Calzada, M. del C. Hernández Maldonado, and L. E. Manjarrez Garduño, Ecuaciones diferenciales para carreras de ingenier{\'\i}a. Grupo Editorial Patria.

C. Burgos, J.-C. Cortés, L. Villafuerte, and R. J. Villanueva, “Solving random fractional second-order linear equations via the mean square Laplace transform: Theory and statistical computing,” Appl Math Comput, vol. 418, p. 126846, 2022.

Y. Chalco-Cano, M. A. Rojas-Medar, and H. Román-Flores, “Sobre ecuaciones diferenciales difusas,” Bol Soc Esp Mat Apl, vol. 41, pp. 91–99, 2007.

E. L. Arias Londoño, J. A. Rúa Vásquez, and A. M. Vélez Carvajal, Ecuaciones diferenciales. Sello Editorial de la Universidad de Medell{\'\i}n, 2012.

R. J. Beerends, H. G. ter Morsche, J. C. den Berg, and E. M. de Vrie, Fourier and Laplace transforms. 2003.

A. Carmona, “Ecuaciones diferenciales estocásticas,” Tesis de grado. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de~…, 2009.

C. J. H. Castrillo, “Aprendizaje de ecuaciones diferenciales aplicadas en f{\'\i}sica utilizando tecnología,” Revista Torreón Universitario, vol. 11, no. 31, 2022.