

*Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional  
(TORA), mediante control basado en energía*



DOI: <https://doi.org/10.23857/dc.v9i1>

Ciencias Técnicas y Aplicadas  
Artículo de Investigación

*Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional  
(TORA), mediante control basado en energía*

*Stabilization of the Translational Oscillator System with Rotational Actuator  
(TORA), through energy based control*

*Estabilização do Sistema Oscilador Traslacional com Atuador Rotacional  
(TORA), através do controle baseado em energia*

Marta Gema Espinoza-Sánchez<sup>I</sup>  
[mespinoza2881@utm.edu.ec](mailto:mespinoza2881@utm.edu.ec)  
<https://orcid.org/0000-0001-7144-6024>

Maribel Cecilia Pérez-Pirela<sup>II</sup>  
[maribel.perez@utm.edu.ec](mailto:maribel.perez@utm.edu.ec)  
<https://orcid.org/0000-0002-9687-5471>

Atilio Morillo-Piña<sup>III</sup>  
[morilloatilio@gmail.com](mailto:morilloatilio@gmail.com)  
<https://orcid.org/0009-0006-0538-2353>

**Correspondencia:** [mespinoza2881@utm.edu.ec](mailto:mespinoza2881@utm.edu.ec)

\***Recibido:** 29 de febrero de 2023 \***Aceptado:** 29 de marzo de 2023 \* **Publicado:** 08 de abril de 2023

- I. Docente investigador, Unidad Educativa Pascasio Flores de Valgas, Ingeniera Hidráulica, Maestrante en Matemática, Universidad Técnica de Manabí.
- II. Docente investigador, PhD en Ciencias de Ingeniería Química, Facultad de Ciencias Básicas. Universidad Técnica de Manabí (UTM).
- III. Docente investigador, PhD en Matemáticas, Centro de Investigación en Matemáticas Aplicadas (CIMA). Facultad de Ingeniería, Universidad del Zulia, Venezuela.

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

---

### Resumen

La estabilización de sistemas no lineales subactuados ha representado un importante desafío en términos de control en los últimos años, debido a la importancia de crear sistemas que mejoren el rendimiento de los procesos hasta su automatización. Es por ello que se realizó una investigación complementaria, a un trabajo de investigación en curso, desde la Maestría en Matemática, del área de Postgrado de la Universidad Técnica de Manabí – Ecuador, donde se ha planteado un estudio que tuvo como objetivo general: Demostrar la estabilización de un sistema mecánico subactuado de grado 1, a través del control basado en energía, con énfasis en el caso del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional. Asimismo, se realizaron simulaciones computacionales con el Software Libre Octave, esto permitió generar archivos de corrida para los cálculos realizados definidos como TORALAZ, SIMTORALAZ, TORADIN y SIMTORADIN. Como resultado se obtuvieron leyes de control suaves, con una amplia cuenca de atracción para el problema de estabilización del sistema mecánico subactuado estudiado, demostrando un rendimiento satisfactorio, incluso lejos de la región donde el modelo puede ser linealizado. Respecto al controlador se redujeron considerablemente las oscilaciones, con un tiempo de asentamiento aceptable.

**Palabras clave:** Control; Energía; Estabilización; TORA.

### Abstract

The stabilization of underactuated nonlinear systems has represented an important challenge in terms of control in recent years, due to the importance of creating systems that improve the performance of processes until their automation. That is why a complementary investigation was carried out, to a research work in progress, from the Master's Degree in Mathematics, from the Postgraduate area of the Technical University of Manabí - Ecuador, where a study has been proposed with the general objective of: Demonstrating the stabilization of a grade 1 underactuated mechanical system, through energy-based control, with emphasis on the case of the Translational Oscillator System with Rotational Actuator. Likewise, computer simulations were carried out with the Octave Free Software, this allowed to generate run files for the calculations carried out defined as TORALAZ, SIMTORALAZ, TORADIN and SIMTORADIN. As a result, smooth control laws were obtained, with a wide basin of attraction for the stabilization problem of the studied underactuated mechanical

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

---

system, demonstrating a satisfactory performance, even far from the region where the model can be linearized. Regarding the controller, the oscillations were considerably reduced, with an acceptable settling time.

**Keywords:** Control; Energy; Stabilization; TORAH

### Resumo

A estabilização de sistemas não lineares subatuados tem representado um importante desafio em termos de controle nos últimos anos, devido à importância da criação de sistemas que melhorem o desempenho dos processos até sua automação. É por isso que foi realizada uma investigação complementar, a um trabalho de pesquisa em andamento, do Mestrado em Matemática, da área de Pós-Graduação da Universidade Técnica de Manabí - Equador, onde foi proposto um estudo com o objetivo geral de : Demonstração da estabilização de um sistema mecânico subatuado grau 1, através do controle baseado em energia, com destaque para o caso do Sistema Oscilador Traslacional com Atuador Rotacional. Da mesma forma, foram realizadas simulações computacionais com o Software Octave Free, o que permitiu gerar arquivos de execução para os cálculos realizados definidos como TORALAZ, SIMTORALAZ, TORADIN e SIMTORADIN. Como resultado, foram obtidas leis de controle suaves, com ampla bacia de atração para o problema de estabilização do sistema mecânico subatuado estudado, demonstrando um desempenho satisfatório, mesmo longe da região onde o modelo pode ser linearizado. Com relação ao controlador, as oscilações foram consideravelmente reduzidas, com um tempo de acomodação aceitável.

**Palavras-chave:** Controle; Energia; Estabilização; TORÁ

### Introducción

Es indiscutible que el avance en las tecnologías ha logrado simplificar procesos y mecanismos para llevar a cabo determinadas tareas y agilizar otras. Es una tendencia mundial el hecho de crear sistemas que mejoren el rendimiento de los procesos hasta convertir los movimientos físicos y repetitivos en movimientos autónomos, con un impulso inicial, hasta su evolución y adaptación a cualquier estructura edificada o en la dinámica de sistemas mecánicos (Institución Universitaria Esumer, 2018).

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

---

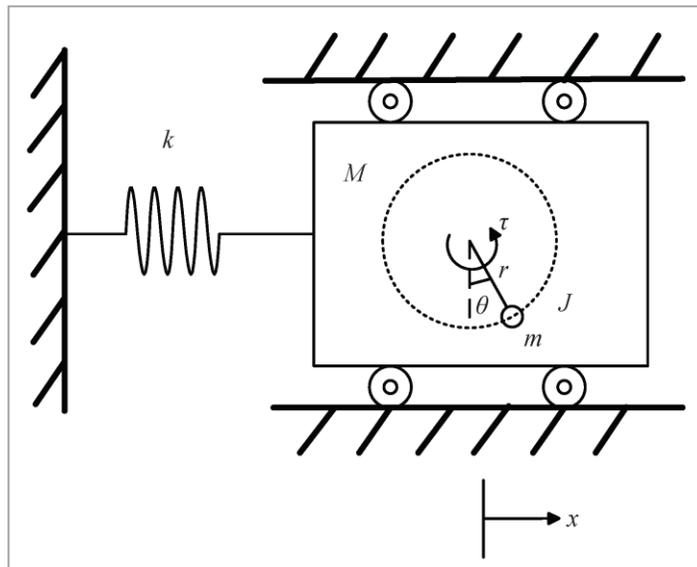
Esto ha conllevado, en el campo de las ciencias a diferentes propuestas en la investigación de sistemas subactuados, asimismo se han ejecutado algunas de ellas, de forma efectiva, en términos de control. Un ejemplo de ello es el Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional, por sus siglas en inglés *Translational Oscillator with Rotational Actuator* (TORA), se caracteriza por ser un “oscilador mecánico no amortiguado  $M$  controlado por la rotación de un péndulo representado por la masa  $m$ ” (Chyau, et al, 2015). Es un sistema subactuado típico, el oscilador no se encuentra amortiguado, por lo que, la trayectoria de bucle abierto de  $M$  resulta en una oscilación sostenida en respuesta a un desplazamiento originario diferente de cero.

Uno de los desafíos de este sistema mecánico subactuado de grado 1 es controlar adecuadamente el movimiento del péndulo del sistema, lo que generaría una intervención eficaz a la oscilación, donde normalmente las estrategias para optimizarlo se encuentran dirigidas a regular el desplazamiento  $x$  del oscilador como el ángulo  $\theta$  del péndulo de origen (Chyau, et al, 2015).

Especialmente para el sistema TORA se requiere la estabilización de la posición del carro y del ángulo de la bola excéntrica en el punto de equilibrio (Salazar, 2019). El problema de control se encuentra abierto y es un desafío teórico, inicialmente este oscilador se desarrolló para estudiar el fenómeno de captura de resonancia y la maniobra de giro para naves espaciales doble giro (Cerezo, 2018). El control de sistemas mecánicos corresponde a uno de los campos más activos de investigación, debido a las diversas aplicaciones en la vida real.

Una serie de aplicaciones científicas, industriales, y militares ha motivado un riguroso análisis para el control de los sistemas mecánicos (Tedrake, 2022). En la actualidad el TORA (*Figura 1*) se utiliza como amortiguador de masa activa (AMD), para grandes obras de ingeniería, entre ellos, puentes extensos, edificios altos, turbinas eólicas flotantes de alta mar, entre otros (Changzhon, et al, 2022).

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía



**Figura 1.** Diagrama Sistema TORA

**Fuente:** Changzhon, et al, 2022

Esto ha traído consigo un interés creciente en el problema de control de sistemas no lineales subactuados porque esgrime el sólido argumento de la economía de diseño, dedicando mayor atención al caso de sistemas mecánicos subactuados de grado 1, debido a que, estos sistemas se caracterizan por el hecho de poseer más grados de libertad que grados de actuación (Chang, 2015).

Es por ello que, el control basado en energía, desde el punto de vista teórico, ha logrado describir el comportamiento dinámico de estos sistemas, obteniéndose su representación en la denominada forma Hamiltoniana controlada por puertos, mediante la cual se facilita el diseño de un controlador por realimentación que permite estabilizarlos en torno a un punto de equilibrio deseado (Gören y Yalçin, 2011).

En este estudio se utilizó la asignación del hamiltoniano deseado al sistema la solución de la EDP encontrada por (Varela, Pérez y Morillo, 2023) en el sentido del Método Directo de Lyapunov (MDL). Se abordó particularmente con el modelo matemático del sistema TORA en lazo abierto que se expresa de la siguiente forma:

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] \\ \dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \\ \dot{p}_1 = -k q_1^2 \\ \dot{p}_2 = -\frac{(c_2^2 \cos(q_2))(\sin(q_2))}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] - \frac{c_2 p_1 p_2 \sin(q_2)}{\delta_1} - c_2 g \sin(q_2) + u \end{array} \right.$$

Para el sistema TORA la matriz  $M$  fue la siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 * \cos(q_2) \\ c_2 * \cos(q_2) & c_3 \end{bmatrix}$$

Y la energía potencial resultó en la siguiente:

$$V(q) = \frac{1}{2} K q_1^2 + m_2 g L (1 - \cos(q_2))$$

$$V_d = \frac{1}{2} R_d (q_1 - \alpha q_2)^2 + \frac{K}{a_1} \left( -\frac{\alpha q_2^2}{2} \sqrt{c_1 c_3} + \sqrt{c_1 c_3} q_1 q_2 + \alpha c_2 \cos(q_2) - \alpha c_2 + c_2 q_1 \sin(q_2) \right)$$

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

En este sentido, se propuso abordar al sistema mecánico subactuado TORA para demostrar su estabilización, obteniendo la función de control basado en energía bajo la estructura hamiltoniana tanto en bucle abierto como en bucle cerrado, con la finalidad de dirigirlo de manera robusta hacia el equilibrio, bajo las consideraciones energéticas.

### Materiales y Métodos

El estudio que se presenta se llevó a cabo como una investigación complementaria, a un trabajo de investigación en curso desde la Maestría en Matemática, del área de Postgrado de la Universidad Técnica de Manabí – Ecuador, la meta principal fue demostrar la estabilización de un sistema mecánico subactuado de grado 1, a través del control basado en energía, con énfasis en el caso del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional.

Esto permitió enmarcar la investigación en un enfoque cualitativo que según lo expresado por (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) “La acción indagatoria se mueve de manera dinámica en ambos sentidos: entre los hechos y su interpretación, y resulta un proceso más bien circular en el que la secuencia no siempre es la misma, pues varía con cada estudio” (p.40).

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

---

Para ello, fue necesario revisar documentalmente las posibilidades de establecer las dinámicas deseadas que conducen a las Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP) asociadas a la estabilización del TORA y las funciones de control en lazo cerrado, luego se realizaron simulaciones numéricas que corroboraron el comportamiento esperado del mismo, con apoyo en las implicaciones teóricas y de consulta de estudios realizados en los últimos años.

### Tipo de Investigación

Demostrar la estabilización de un sistema mecánico subactuado de grado 1, a través del control basado en energía, con énfasis en el caso del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional es una investigación que se encuentra en la tipología de las matemáticas aplicadas, en vista que se busca la resolución de problemas prácticos respecto a la estabilización de un sistema no lineal.

Sin embargo, se debe considerar que se obtiene el apoyo de la investigación básica, en tanto que el manejo de lo teórico fue crucial para las bases del estudio, pues ésta “sienta las bases teóricas para la resolución de los problemas de la investigación aplicada” (Rus y Coll, 2021).

Por lo cual, el propósito del estudio se acercó más a la definición de la investigación aplicada, que para (Jacovkis, 2019) es “la experimentación y aplicación de teorías, herramientas, modelos y métodos de matemática para resolver un problema de la ciencia tecnología, ingeniería, informática, industria y demás disciplinas”. Particularmente, el Sistema TORA, es de gran interés para la ingeniería, tecnología e innovación, lo que imprime un valor aplicado a los modelos matemáticos que se utilicen para su estabilización y control.

### Técnicas e instrumentos de recolección y presentación de los datos

Para el modelo del sistema TORA, se realizaron simulaciones computacionales a través del Software Libre Octave (2023), esto permitió generar archivos de corrida para los cálculos realizados y obtener las respectivas simulaciones. Se definieron como TORALAZ, SIMTORALAZ, TORADIN y SIMTORADIN. Con estas simulaciones se mostró el desempeño del controlador propuesto, bajo los parámetros establecidos  $C_1= 12$ ;  $C_2= 1$ ;  $C_3= 11$ ;  $K= 5$ .

### Resultados y Discusión

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

Es importante acotar que, el sistema TORA es de interés como un caso de estudio en el diseño de controles no lineales debido a que el modelo exhibe una interacción no lineal entre sus movimientos traslacional y rotacional.

De forma que, para efectos de este estudio se interpreta el mecanismo de estabilización en términos del intercambio de la energía del sistema, para lo cual se siguen dos etapas básicas: (1) la etapa del moldeado de la energía, la cual consiste en modificar la función de energía total del sistema para asignar el estado de equilibrio deseado; y (2) la etapa de inyección de amortiguamiento para alcanzar la estabilidad asintótica.

De forma que, siendo la energía potencial (Varela, Pérez y Morillo, 2023) la siguiente:

$$V(q) = \frac{1}{2}Kq_1^2 + m_2gL(1 - \cos(q_2))$$

$$V_d = \frac{1}{2}R_d(q_1 - \alpha q_2)^2 + \frac{K}{a_1} \left( -\frac{\alpha q_2^2}{2} \sqrt{c_1 c_3} + \sqrt{c_1 c_3} q_1 q_2 + \alpha c_2 \cos(q_2) - \alpha c_2 + c_2 q_1 \sin(q_2) \right)$$

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

### Moldeado de la Energía

Se procedió a determinar la función de control  $u_{es}$  que permita estabilizar el Sistema TORA, por lo que, se busca que un control basado en energía haga coincidir el comportamiento del sistema en lazo abierto con la dinámica objetivo.

Para obtener el término de moldeado de la energía  $u_{es}$  en el controlador, se consigue:

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H \\ \nabla_p H \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} u_{es} = \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} M_d \\ -M_d M^{-1} & J_2(q, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla_q H_d \\ \nabla_p H_d \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\dot{p} = -\nabla_q H + G * u_{es} = -M_d * M^{-1} * \nabla_q H_d$$

$$G * u_{es} = \nabla_q H - M_d * M^{-1} * \nabla_q H_d,$$

$$u_{es} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} -\frac{1}{\delta_1} [(a_1 c_3 - \alpha a_1 c_2 \cos(q_2)) \nabla_{q_1} V_d + (-a_1 c_2 \cos(q_2) + \alpha a_1 c_1) \nabla_{q_2} V_d] + \nabla_{q_1} H \\ -\frac{1}{\delta_1} [\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2) \nabla_{q_1} V_d + (-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1) \nabla_{q_2} V_d] + \nabla_{q_2} H \end{bmatrix}$$

$$u_{es} = -\frac{1}{\delta_1} [\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2) \nabla_{q_1} V_d + (-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1) \nabla_{q_2} V_d] + \nabla_{q_2} H \quad (2)$$

Sustituyendo la  $V_d$  obtenida que corresponde a la  $V_d$  propuesta, se tuvo que:

$$H_d = \frac{1}{2} p^T M_d^{-1} p + \frac{1}{2} R_d (q_1 - \alpha q_2)^2 + \frac{K}{a_1} \left( -\frac{\alpha q_2^2}{2} \sqrt{c_1 c_3} + \sqrt{c_1 c_3} q_1 q_2 + \alpha c_2 \cos(q_2) - \alpha c_2 + c_2 q_1 \sin(q_2) \right)$$

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

Ahora se procede a calcular  $\frac{\partial V_d}{\partial q_1}$ ,  $\frac{\partial V_d}{\partial q_2}$  y  $\frac{\partial H}{\partial q_2}$  y sustituyendo:

$$u_{es} = -\frac{1}{\delta_{12}} \left\{ (\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2)) \left( R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \text{sen}(q_2))}{a_1} \right) \right. \\
 + (-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1) \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3}(q_1 - \alpha q_2)}{a_1} - \frac{K\alpha c_2 \text{sen}(q_2)}{a_1} + \right. \\
 \left. \left. \frac{Kc_2 q_1 \cos(q_2)}{a_1} \right) \right\} \dots \frac{-c_2^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{c_2 p_1 p_2 \text{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \text{sen}(q_2)$$

Simplificando se consigue finalmente que  $u_{es}$  tiene la siguiente forma:

$$u_{es} = -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \text{sen}(q_2))}{a_1} \right] \dots \dots \\
 \dots - \frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3}(q_1 - \alpha q_2)}{a_1} - \frac{K\alpha c_2 \text{sen}(q_2)}{a_1} \right. \\
 \left. + \frac{Kc_2 q_1 \cos(q_2)}{a_1} \right) \\
 \frac{-c_2^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{c_2 p_1 p_2 \text{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \text{sen}(q_2) \quad (3)$$

### Inyección de Amortiguamiento

Una vez encontrada la  $u_{es}$ , se procede a calcular la función de control  $u$  que garantiza la estabilización asintótica del sistema TORA:

Se sabe que  $u = u_{es}(q, p) + u_{di}(q, p)$  y que  $u_{di} = -kvG^T \nabla_p H_d$  de tal manera que:

$$\nabla_p H_d = M_d^{-1} p \\
 u_{di} = -kv[0 \quad 1] M_d^{-1} p$$

Como la matriz de inercia deseada tiene la forma:

$$M_d = \begin{bmatrix} a_1 & \alpha a_1 \\ \alpha a_1 & a_3 \end{bmatrix} \rightarrow M_d^{-1} = \frac{1}{\delta_2} \begin{bmatrix} a_3 & -\alpha a_1 \\ -\alpha a_1 & a_1 \end{bmatrix}, \text{ donde } \delta_2 = a_1 a_3 - \alpha^2 a_1^2$$

La inyección de amortiguamiento viene dada por:

$$u_{di} = -\frac{kv}{\delta_2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} a_3 & -\alpha a_1 \\ -\alpha a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \\
 u_{di} = -\frac{kv}{\delta_2} [0 \quad 1] \begin{bmatrix} a_3 p_1 - \alpha a_1 p_2 \\ -\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2 \end{bmatrix}$$

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

$$u_{di} = -\frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]$$

Finalmente, la función de control que garantiza que el sistema TORA en lazo cerrado se comporte igual que la dinámica objetivo en el control basado en energía y que logra la estabilidad asintótica del sistema.

$u = u_{es} - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2] \rightarrow u_{es}$  es la calculada y corresponde a la ecuación (3)

Sustituyendo  $u_{es}$  se consigue que la función de control  $u$  es la siguiente:

$$u = -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \text{sen}(q_2))}{a_1} \right] \\
 - \frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3}(q_1 - \alpha q_2)}{a_1} - \frac{K\alpha c_2 \text{sen}(q_2)}{a_1} + \frac{K c_2 q_1 \cos(q_2)}{a_1} \right) \\
 - \frac{-c_2^2 \text{sen}(q_2) \cos(q_2)}{\delta_1^2} [c_3 p_1^2 - 2c_2 p_1 p_2 \cos(q_2) + c_1 p_2^2] + \frac{c_2 p_1 p_2 \text{sen}(q_2)}{\delta_1} + m_2 g L \text{sen}(q_2) \\
 - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]$$

Una vez encontradas cada una de las funciones necesarias para el diseño de control basado en energía, es posible presentar el sistema TORA en lazo cerrado, sustituyendo  $\nabla_{q_2} H$  y  $u$  :

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] \\
 \dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \\
 \dot{p}_1 = -K q_1 \\
 \dot{p}_2 = -\nabla_{q_2} H + u$$

Simplificando el sistema TORA en lazo cerrado se obtiene lo siguiente:

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{\delta_1} [c_3 p_1 - c_2 p_2 \cos(q_2)] \\
 \dot{q}_2 = \frac{1}{\delta_1} [-c_2 p_1 \cos(q_2) + c_1 p_2] \\
 \dot{p}_1 = -K q_1 \\
 \dot{p}_2 = -\frac{(\alpha a_1 c_3 - a_3 c_2 \cos(q_2))}{\delta_1} \left[ R_d(q_1 - \alpha q_2) + \frac{K(\sqrt{c_1 c_3} q_2 + c_2 \text{sen}(q_2))}{a_1} \right] \\
 - \frac{(-\alpha a_1 c_2 \cos(q_2) + a_3 c_1)}{\delta_1} \left( -R_d(q_1 - \alpha q_2) \alpha + \frac{K\sqrt{c_1 c_3}(q_1 - \alpha q_2)}{a_1} - \frac{K\alpha c_2 \text{sen}(q_2)}{a_1} + \frac{K c_2 q_1 \cos(q_2)}{a_1} \right) \\
 - \frac{kv}{\delta_2} [-\alpha a_1 p_1 + a_1 p_2]$$

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

Se realizaron simulaciones computacionales con los programas TORALAZ, SIMTORALAZ, TORADIN y SIMTORADIN (Octave, 2023), en la Tabla 1 se expresan los parámetros, que fueron tomados de [13].

**Tabla 1.** Parámetros para el sistema TORA

Parámetro	$c_1$	$c_2$	$c_3$	K
Valor	12	1	11	5

Fuente: Autores (2023)

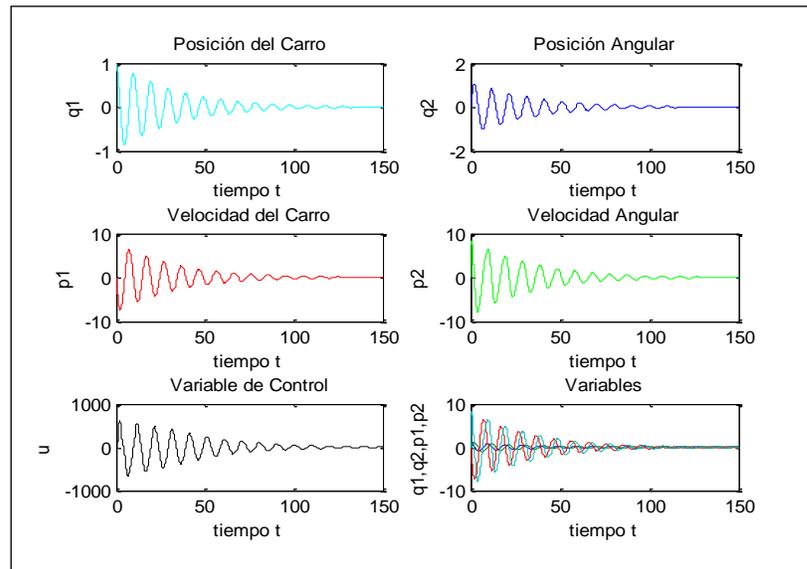
Para la matriz  $M_d$ , se tomó los valores  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = \alpha a_1$ ,  $a_3 = 4$ .  $\alpha = \sqrt{\frac{c_3}{c_1}} = \sqrt{\frac{11}{12}}$

Se debe tomar en cuenta que el parámetro de diseño  $R_d$  debe cumplir:

$R_d < 2 \frac{(K\sqrt{c_1 c_3} + Kc_2)}{a_1 \alpha} \rightarrow$  el Hess ( $v_d(0,0)$ ) sea definido positivo  $\rightarrow (0,0)$  es un mínimo y es un punto de equilibrio es estable.

$$\text{Sustituyendo: } R_d < 2 \frac{(5\sqrt{(12)(11)} + 5(1))}{(1)\sqrt{\frac{11}{12}}} < 130.5$$

Una respuesta acertada del sistema TORA en lazo cerrado con el controlador, se muestra en las figuras 2 y 3.

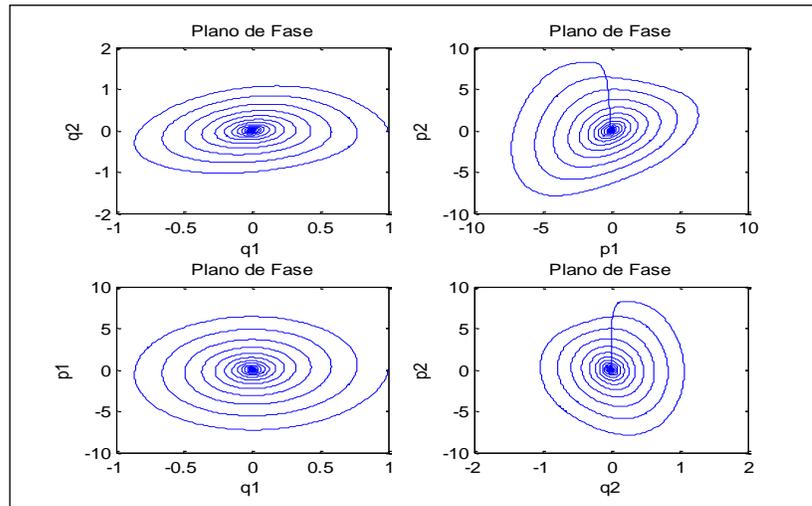


**Figura 2.** Simulación del Sistema TORA en lazo cerrado: Comportamiento de las variables y función de control

Fuente: Autores (2023), a partir del Software Octave (2023)

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

Como puede verse, el sistema exhibe estos resultados en forma de oscilaciones amortiguadas, y la estabilización se produce a los 100 segundos. En la figura 2 también se puede ver el esfuerzo de control.



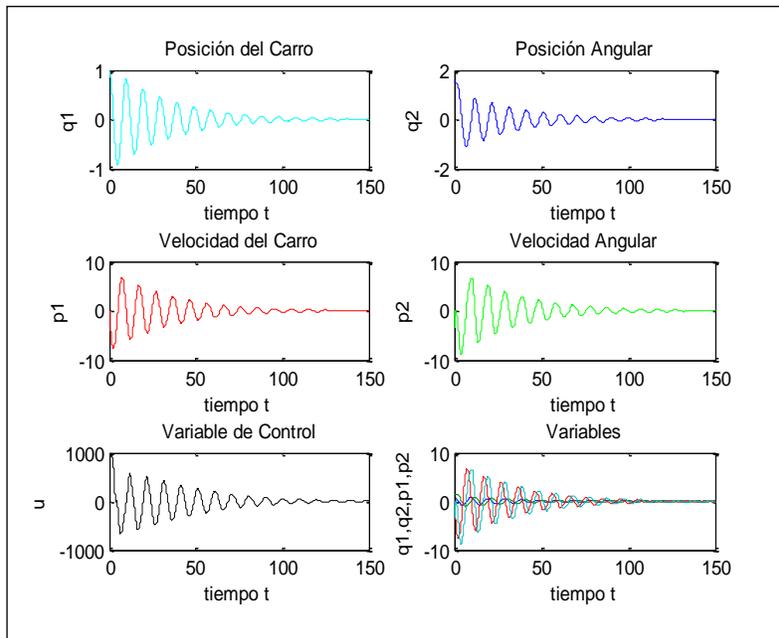
**Figura 3.** Simulación del Sistema TORA en lazo cerrado: Plano de Fase

**Fuente:** Autores (2023), a partir del Software Octave (2023)

Para ilustrar la naturaleza global de la ley de control obtenida se realizan simulaciones cambiando las condiciones iniciales del sistema.

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

Primero se toma como condiciones iniciales:  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 0$ . Una respuesta acertada del sistema en lazo cerrado con el controlador, se muestra en las figuras 4 y 5.

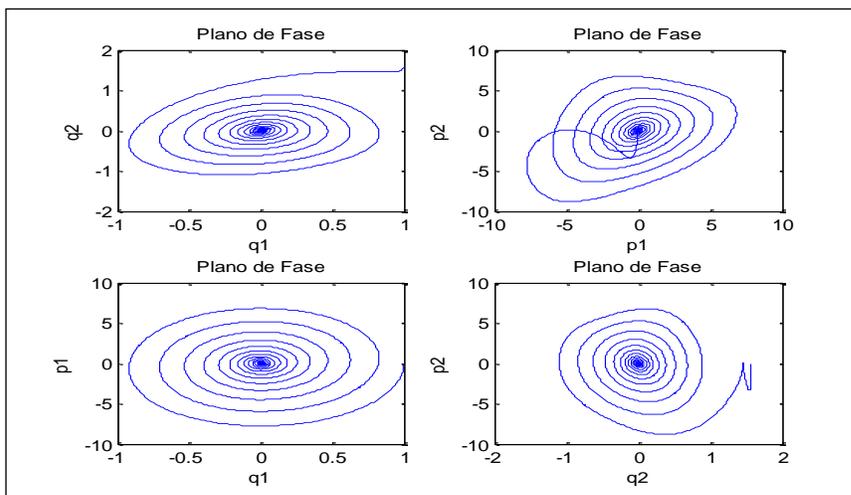


**Figura 4.** Simulación del Sistema TORA en lazo cerrado: Comportamiento de las variables y función de Control.

Condiciones iniciales  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 0$

**Fuente:** Autores (2023), a partir del Software Octave (2023)

El sistema exhibe su respuesta en forma de oscilaciones amortiguadas, y la estabilización se produce a los 100 segundos. En la figura 4 también se puede ver el esfuerzo de control.



**Figura 5.** Simulación del Sistema TORA en lazo cerrado: Plano de Fase.

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

Condiciones iniciales  $q_1 = 1$ ,  $q_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = 0$

**Fuente:** Autores (2023), a partir del Software Octave (2023)

Las simulaciones numéricas realizadas muestran un excelente comportamiento del controlador diseñado, reduciendo significativamente las oscilaciones de la plataforma, y con un tiempo de asentamiento aceptable.

### Conclusiones

Al inicio del estudio se propuso como objetivo general demostrar la estabilización de un sistema mecánico subactuado de grado 1, a través del control basado en energía, con énfasis en el caso del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional. Esto condujo a desarrollar un esquema de control basado en energía para el sistema prototipo TORA, donde la principal característica de este método es que explota la estructura física del sistema, en este caso, aprovechando la información del comportamiento dinámico del sistema mecánico subactuado que está contenida en las funciones de energía y de disipación, en consecuencia, el diseño del controlador se concentró en el manejo y modificación de estas variables.

Esto produjo como resultado que, mediante el control basado en energía se obtuvieran leyes de control suaves con una amplia cuenca de atracción para el problema de estabilización del sistema subactuado TORA. De manera que, el rendimiento del controlador no lineal resultó satisfactorio, incluso lejos de la región donde el modelo puede ser linealizado y controlado por técnicas lineales, tal como se aprecia en las simulaciones, donde se redujeron significativamente las oscilaciones de la plataforma, con un tiempo de asentamiento aceptable.

### Referencias

1. Cerezo, D. (2018). Based on PBC, the IDA-PBC (Interconnection and Damping Assignment–Passivity-based. Control). Port Hamiltonian Control: <https://acortar.link/nZLOeQ>
2. Chang, D. (2015). On the Method of Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control for the Stabilization of Mechanical Systems. Mathematics > Optimization and Control, 19(5), 556-575. <https://arxiv.org/abs/1301.4285>

## Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

3. Changzhon, P., Cui, C., Zhou, I., Yin, R., y Li, Z. (2022). A Model-Free Output Feedback Control Approach for the Stabilization of Underactuated TORA System with Input Saturation. MDPI, 11(3), 97. <https://www.mdpi.com/2076-0825/11/3/97/htm>
4. Chyau, A., Feng, Y., y Yu, C. (2015). Adaptive Control of Underactuated Mechanical Systems. World Scientific: [https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814663557\\_0007](https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789814663557_0007)
5. Gören, L., y Yalçın, Y. (2011). A Direct Discrete-time IDA-PBC Design Method for a Class of Underactuated Hamiltonian Systems. ScientDirect, 44(1), 13456 - 13461. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S147466701645785X>
6. Hernández, S., Fernández, C., y Baptista, L. (2014). Metodología de la Investigación. México: Mc Graw Hill.
7. Institución Universitaria Esumer. (2018). Control y automatización inteligente. Revista Mercatec, 3(54), 15-23. <http://repositorio.esumer.edu.co/jspui/handle/esumer/1903>
8. Jacovkis, P. (2019). Matemática aplicada. Magazine de la Ciencia: <http://magazinedeciencia.com.ar/la-matematica-aplicada>
9. Morillo, A., y Arteaga, F. (2007). Estabilización del sistema Acrobot usando el enfoque IDA-PBC. (R. I. UC, Ed.) Redalyc, 14(3), 30-40. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=70711260005>
10. Octave. (2023). Software Libre. Lenguaje de programación científica: <https://octave.org/>
11. Rus, E., y Coll, F. (01 de Agosto de 2021). Matemáticas aplicadas. <https://acortar.link/Uk8Tw0>
12. Salazar, B. (10 de junio de 2019). Ingeniería Industrial. Programación lineal en Tora: <https://acortar.link/Dbybjx>
13. Tedrake, R. (2022). Underactuated Robotics. Algorithms for Walking, Running, Swimming, Flying, and Manipulation. <http://underactuated.mit.edu/acrobot.html>
14. Varela, W., Pérez, M., y Morillo, A. (2023). Construcción de funciones de Lyapunov para la estabilización de sistemas mecánicos subactuados. Dominio de las Ciencias, 9(3), 208-230. <https://dominiodelasciencias.com/ojs/index.php/es/article/view/3280>

©2023 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons

Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0)

# Estabilización del Sistema Oscilador Traslacional con Actuador Rotacional (TORA), mediante control basado en energía

---

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>.)