Dom. Cien., ISSN: 2477-8818
Vol. 8, núm. 3. Julio-Septiembre, 2022, pp. 655-665

DOI: http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i3

Ciencias de la Educación
Artículo de Investigación

Criterios metodológicos para la solución de integrales dobles en el cálculo de volúmenes

Methodological criteria for the solution of double integrals in the calculation of volumes

Critérios metodológicos para a solução de integrais duplas no cálculo de volumes

Romel Manolo Insuasti-Castelo [I]
rinsuasti@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-3946-9642

Vanessa Fernanda Morales-Rovalino [II]
vanessa.morales@espoch.edu.ec
https://orcid.org/0000-0001-5352-1545

Denise Cristina Insuasti-Guamantaqui [III]
dinsuasti@outlook.com
https://orcid.org/0000-0001-5214-176X

Correspondencia: rinsuasti@espoch.edu.ec

***Recibido:** 29 de mayo del 2022 ***Aceptado:** 02 de junio de 2022 *** Publicado:** 11 de julio de 2022

I. Magíster en Matemática Básica, Ingeniero Mecánico, Docente en la Carrera de Ingeniería Automotriz, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
II. Maestría en Ingeniería Mecánica, Producción Industrial, Ingeniera Mecánica, Docente en la Facultad de Administración de Empresas, Carrera de Gestión de Transportes, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.
III. Ingeniera en Electrónica Control y Redes Industriales, Certificación en Prevención de Riesgos Laborales, Prevención de Riesgos Laborales, Universidad Nacional de Chimborazo, Riobamba, Ecuador.

Resumen

Cuando se incursiona en el tema de las integrales dobles para el cálculo de volúmenes, es necesario tener una fundamentación clara de la construcción de superficies en tres dimensiones, conceptos básicos como intersección entre superficies, curvas, secciones y trazas para poder determinar en forma clara y concreta el volumen a ser calculado, a esto se añade algunas consideraciones metodológicas que deben ser aplicadas en forma ordenada para definir correctamente el volumen, para esto en forma general se debe establecer en que plano se va a considerar la región, delimitándola con las diferentes curvas y por ende funciones correspondientes, luego hay que definir cuál es la superficie que cubre la región y en función de que variables debe estar, para posteriormente delimitar los límites de la doble integral considerando el sentido del corte de las rebanadas del diferencial de volumen, en la región o en las sub regiones predeterminadas bajo ciertos criterios que ayudan a una resolución más sencillas, como: el menor número de subregiones y que las curvas presentes deben ser realmente funciones, posterior a esto es necesario métodos de integración o integración numérica para encontrar el valor del volumen.

Palabras Claves: Integrales dobles; cálculo de volúmenes; regiones y sub regiones.

Abstract

When entering the subject of double integrals for calculating volumes, it is necessary to have a clear foundation for the construction of surfaces in three dimensions, basic concepts such as the intersection between surfaces, curves, sections and traces to be able to determine clearly and specifies the volume to be calculated, to this is added some methodological considerations that must be applied in an orderly manner to correctly define the volume, for this in general it must be established in which plane the region is going to be considered, delimiting it with the different curves and therefore corresponding functions, then it is necessary to define what is the surface that covers the region and depending on what variables it must be, to later delimit the limits of the double integral considering the sense of the cut of the slices of the volume differential, in the region or in the predetermined sub regions under certain criteria that help a more precise resolution simple, such as: the least number of subregions and that the curves present must really be functions, after this, integration or numerical integration methods are necessary to find the value of the volume.

Keywords: double integrals; calculation of volumes; regions and sub regions.

Resumo

Ao entrar no assunto de integrais duplas para cálculo de volumes, é necessário ter uma base clara para a construção de superfícies em três dimensões, conceitos básicos como a interseção entre superfícies, curvas, seções e traços para poder determinar com clareza e especificar volume a ser calculado, a isso se somam algumas considerações metodológicas que devem ser aplicadas de forma ordenada para definir corretamente o volume, para isso em geral deve-se estabelecer em qual plano a região será considerada, delimitando-a com o diferentes curvas e, portanto, funções correspondentes, então é necessário definir qual é a superfície que cobre a região e dependendo de quais variáveis deve ser, para depois delimitar os limites da integral dupla considerando o sentido do corte das fatias da diferencial de volume, na região ou nas sub-regiões pré-determinadas sob certos critérios que ajudam a uma resolução mais precisa simples, como: o menor número de sub-regiões e que as curvas presentes realmente devem ser funções, após isso, métodos de integração ou integração numérica são necessários para encontrar o valor do volume.

Palavras-chave: integrais duplos; cálculo de volumes; regiões e sub-regiões.

Introducción

La utilización de integrales dobles para el cálculo del volumen generado por superficies es un tema que reviste cierta complejidad cuando algunos conceptos de gráficas en tres dimensiones no se encuentran bien cimentados en el conocimiento de los alumnos que reciben Análisis Matemático. Por esta razón vamos a mencionar algunos para que estos sirvan de base y como herramientas para la determinación del volumen a calcular mediante integrales dobles.

Las funciones para ser graficadas se necesitan de dimensiones, donde una dimensión no es más que una recta numérica que contiene valores desde el $-\infty\ al + \infty$ a esto comúnmente se lo llama eje, por tanto, cada eje en un sistema de referencia cartesiano representa una dimensión, de esta manera al tener dos dimensiones se debe tener dos ejes y al tener tres dimensiones se necesita tres ejes. Cada dimensión debe corresponder a una de las variables de la función, de las cuales se deben distinguir variables dependientes e independientes.

Desarrollo

Las funciones por lo tanto se las pueden graficar en dimensiones superiores a las que se encuentra definidas.

Tabla 1. Dimensiones de las funciones

Función	**Definida**	**Representación**	**Tratadas en $\mathbb{R}^2$**	**Tratadas en $\mathbb{R}^3$**
$f(x) = a$ $x = a$	$\mathbb{R}^1$	Punto	Recta	Superficie
$y = f(x)$ $y = x + a$	$\mathbb{R}^2$	Curva	Curva	Superficie
$z = f(x, y)$ $z = x + y + a$	$\mathbb{R}^3$	Superficie	_____	_____

Elaborado: Autores

Una función definida en $\mathbb{R}^3$ puede ser graficada en dimensiones inferiores bajo el concepto de secciones, que es dar un valor determinado o constante a una de las variables obteniendo de esta manera una función con una variable menos es decir se tendrá una función en $\mathbb{R}^2$. Esto se puede entender también como la intersección de la superficie en cuestión con el plano de sección con el valor constante, así:

Si se tiene una función en $\mathbb{R}^3$:

$$z = x + y - 5$$

$$x = k \text{ donde, } k = cte$$

Al remplazar x en z se tiene:

$z = y + 5 + k$

Obteniendo una función en $\mathbb{R}^2$que representa una curva en el plano de la sección $x = k$

Si el valor de la constante es $k = 0$, entonces la sección se denomina traza y el plano de sección en este caso coincide con el plano cartesiano yz o el plano de las variables con las que queda la superficie después de evaluar $k = 0$.

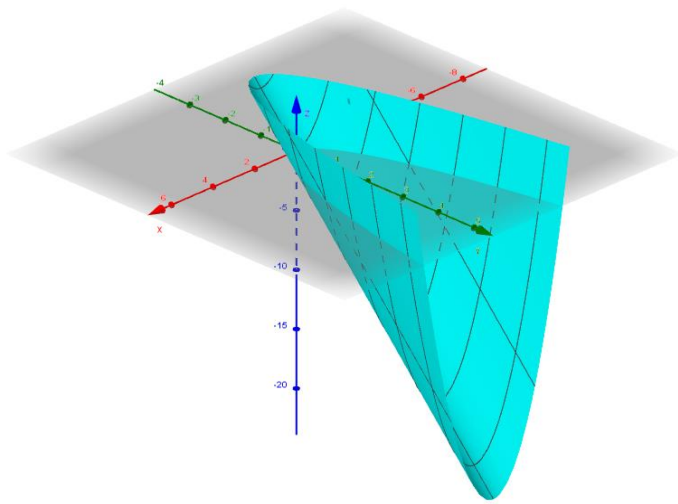
En el cálculo de volúmenes mediante integrales dobles se manejan muchos criterios y decisiones que permitirán un cálculo preciso estableciendo u camino en lo posible sencillo y comprensibles para poder calcular el volumen deseado. Estos se pueden ordenar de la siguiente manera estableciendo una metodología que resultará muy útil.

Aplicación

Encontrar el volumen total limitado por la superficie $z = 2x^2 - 4y$ y la región $R: -1 \leq x \leq 2$ y $1 \leq y \leq 3$.

La siguiente gráfica representa la superficie en $\mathbb{R}^3$ de $z = 2x^2 - 4y$, esta se extiende de tal manera que cubra de ser del caso a la región dada.

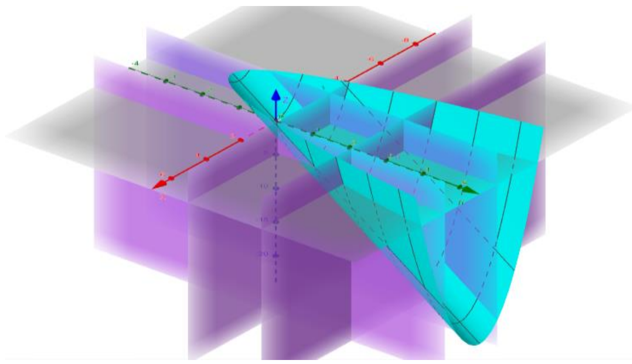
Figura 1. Volumen total



Elaborado: Autores

Región. - La región dada se encuentra en el plano xy y se la puede interpretar como las superficies que se levantan perpendiculares a la región dada, encerrando un área, que en este caso está determinada en forma explícita. Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 2. Región en el plano XY



Elaborado: Autores

La región dada sufre una modificación puesto que la superficie corta una parte de la región. Esto se puede calcular a partir de intersecar la superficie con el plano xy, cuya ecuación es $z = 0$, es decir resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} z = 0 \\ z = 2x^2 - 4y \end{cases}$$

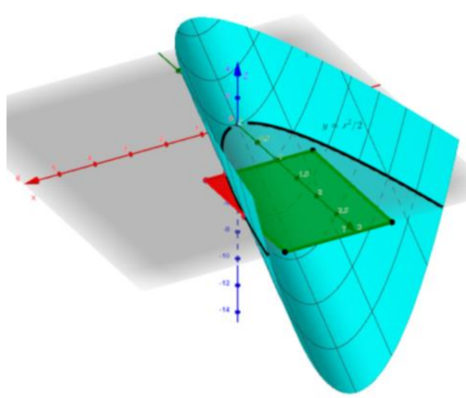
Teniendo como resultado la curva intersección de la superficie con el plano xy.

$$2x^2 - 4y = 0$$

O, $\quad y = \frac{x^2}{2}$

La región como se observa se modifica por la curva $y = \frac{x^2}{2}$, marcándose dos sub regiones claramente definidas, que generan dos volúmenes, como se ve en la siguiente gráfica.

Figura 3. Sub regiones generadas



Elaborado: Autores

Superficie. - Se debe indicar que la superficie se encuentra sobre la región dada, pero es necesario comprobar su posición relativa respecto del plano xy, para determinar si el volumen se lo debe considerar negativo o positivo, para lo que necesario evaluar a la función de la superficie en un punto dentro de las dos subregiones regiones, elegiremos entonces los siguientes valores.

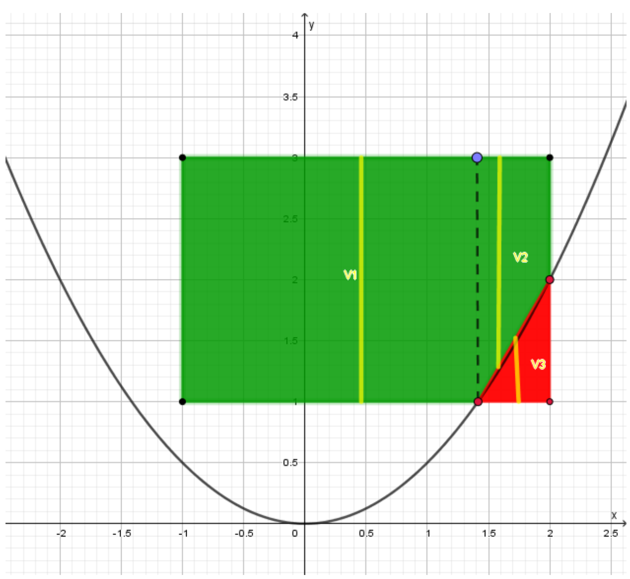
Tabla 2. Dimensiones de las funciones

Sub región	**Punto (x,y)**	$z = 2x^2 - 4y$	**Volumen**
V1 – V2	(1,1)	-2	Negativo
V3	(2,1)	4	Positivo

Elaborado: Autores

Una vez definida el plano y la región se procede a determinar los límites de la integral doble, los cuales deben definir claramente la región o subregión de ser el caso, como se observa en la siguiente figura, se tiene tres subregiones, ya que al determinar la base de los diferenciales de volúmenes estos no se encuentran limitados por las mismas curvas, entonces se tiene tres volúmenes a calcular, los cuales se encuentran sobre cada una de las sub regiones.

Figura 4. Límites de la integral doble



Elaborado: Autores

Integral. - Las integrales evaluadas en cada sub región son:

$$V1 = \int_{x=-1}^{x=\sqrt{2}} \int_{y=1}^{y=3} (2x^2 - 4y)\, dy\, dx = -33{,}523$$

$$V2 = \int_{x=\sqrt{2}}^{x=2} \int_{y=\frac{x^2}{2}}^{y=3} (2x^2 - 4y)\, dy\, dx = -2{,}8353$$

$$V3 = \int_{x=\sqrt{2}}^{x=2} \int_{y=1}^{y=\frac{x^2}{2}} (2x^2 - 4y)\, dy\, dx = 0{,}35817$$

El volumen total solicitado será la suma de:

$$V = |V1| + |V2| + |V3|$$

$V = |-33{,}523| + |-2{,}8353| + |0{,}35817|$

$V = 36{,}716$

Discusión

El objetivo de resolver un volumen determinado mediante integrales dobles se cumplirá si se logra determinar los diferentes valores correctos de la ecuación.

1.- Región. - Determinar en qué plano se encuentra la región para de esta manera utilizar la ecuación de volumen correspondiente, además se debe entender que el orden de las diferenciales de las integrales indica a lo largo de que eje se cortan las rebanadas del diferencial de volumen sobre la región, entendiéndose que el ultimo diferencial de la ecuación representa esto, como se indica en la siguiente tabla.

Tabla 3. Volumen determinado mediante integrales dobles

Región en el plano	Volumen	dA	Rebanas a lo largo
XY	$V = \iint_R f(x,y)dA$	$dxdy$	y
		$dydx$	x
XZ	$V = \iint_R f(x,z)dA$	$dxdz$	z
		$dzdx$	x
YZ	$V = \iint_R f(y,z)dA$	$dydz$	z
		$dzdy$	y

Elaborado: Autores

La región puede estar definida en forma explícita es decir se indicarán las curvas que conforman la región, o en forma implícita, esto es que una superficie o varias al intersecarse con los planos en donde se encuentra la región generarán curvas para definir dicha región.

El principal criterio para seleccionar el plano donde se encuentra la región es que en lo posible exista una superficie que cubra totalmente dicha región. En ocasiones la región es modificada por la superficie ya que esta corta a la región generando subregiones, las cuales se debe considerar en el cálculo de la integral doble y por ende del volumen.

2.- Superficie. Los criterios que se debe tomar en cuenta para la superficie:

- La superficie debe estar en función depende del plano donde se encuentra la región.
- La superficie pude generar subregiones, debido a que esta pude cortar a una región general más grande, las cuales se debe comprobar si generan volúmenes positivos o negativos, esto se realiza evaluando a la función de la superficie para cualquier punto de las subregiones, si la función es positiva entonces el volumen es positivo, pero si la función evaluada es negativa entonces el volumen también será negativo.

3.- Integral. - Una vez seleccionado la región y el plano donde se encuentra es necesario determinar la integral con todas sus partes esto es sus límites inferiores y superiores, el orden de los diferenciales de volumen sobre la región

- Los límites de las integrales definidas de la doble integral deben representar claramente la región o subregiones, para lo que se debe considerar que los valores de los limites corresponde a funciones en $\mathbb{R}^2$.
- El número de diferenciales de la integral doble dependerá del número de subregiones.
- Se debe determinar hacia donde se deben cortar las rebanadas de los diferenciales de volumen. Se debe seleccionar el sentido donde se tenga menos diferenciales de volumen y las curvas que las limitan sean estrictamente funciones, pues esto ayuda en los cálculos de las integrales.
- El diferencial de volumen de la integral doble que se debe buscar es el que sirva para toda la región o subregión.

Conclusiones

- La metodología propuesta permite calcular el volumen por medio de integrales dobles, que se encuentra limitada por superficies, con un criterio ordenado y siempre buscando la facilidad del cálculo, esto es al determinar la región, la superficie sobre la región y los límites de la integral lograremos evaluar el correctamente volumen deseado.
- Los volúmenes calculados por integrales dobles pueden ser negativos o positivos esto depende de que si la función que representa la superficie se encuentra al lado negativo o positivo respectivamente.
- La región o subregión debe estar representado claramente en los límites de las integrales definidas dobles. Recordando que estas curvas que limitan en la región deben ser tratadas como curvas o funciones en $\mathbb{R}^2$.

Referencias

1. Apostol, T. M.   1985. Calculus. Volumen II – 2da Edición. Editorial De. Reverté S.A. (se puede descargar en español de http://mat1630.files.wordpress.com/2010/08/apostol-calculo-vol-2.pdf)
2. Ayres. Ecuaciones diferenciales. Editorial Mc Graw-Hill.

3. Blanchard, Paul. 1999. Ecuaciones diferenciales. Editorial Thomson International.
4. Edwards C. H., Penney D. E. 2001. Ecuaciones diferenciales. Editorial Pearson Educación.
5. Granville, W. (2001). Cálculo Diferencial e Integral. México: Editorial Limusa.
6. Jiménez, R. (2011). Matemáticas VI. Cálculo Integral. México: Pearson Educación.
7. Larson R. E., Hostetler, R. P., Edwards B. H., Heyd D. E. 1996. Cálculo y Geometría Analítica Volumen 2 (Sexta Edición), Copyright © 1996 McGRAW HILL
8. Larson, R.; Hostetler, R.; Edwards, B. (2005). Cálculo Diferencial e Integral. México: Mc Graw Hill.
9. Orduño, H. (2008). Cálculo. México: Fondo de Cultura Económica.
10. Purcell, E. J., Varberg, D., Rigdon, S. 2007. Cálculo (Novena Edición), Copyright © 2007 PEARSON EDUCACIÓN, México 2007
11. Spiegel, M. R. 1973. Análisis Vectorial Mc. Graw Hill. Colección Schaum.
12. Stewart, J. (2001). Cálculo de una variable. Trascendentes Tempranas. México: Thomson Learning.
13. Stewart, J. 2008. Cálculo de variables trascendentes tempranas (Octava Edición) – McMaster University, Copyright © 2008 THOMSON BROOKS/COLE – (Se puede descargar la versión en español https://doku.pub/download/calculo-de-varias-variables-james-stewartpdf-8lyrgkv7j20d)
14. Swokowski, E. (1989). Cálculo con Geometría Analítica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
15. Thomas, G. Jr. Y – Finney, R.L. 1999. Cálculo varias variables. Addison Wesley.
16. Trejo, C. A. 1987. Análisis vectorial. Ed. Kapeluz.
17. Zill, D. G. 1987. Cálculo Grupo Editorial Iberoamericana.
18. Zill, Dennis G. 2001. Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado. Ed.Thomson Learnig.