Dom. Cien., ISSN: 2477-8818
Vol. 8, núm. 1, Enero-Marzo 2022, pp. 566-582

DOI: http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i41.2509

Ciencias técnicas y aplicadas

Artículo de investigación

Diseño de un sistema de control realimentado tipo servo para un modelo electromecánico

Design of a servo-type feedback control system for an electromechanical model

Projeto de um sistema de controle por realimentação do tipo servo para um modelo eletromecânico

Ismael Elías Erazo-Velasco [I]
erazoismael@yahoo.com
https://orcid.org/0000-0002-7647-4611

Byron Fernando Chere-Quiñónez [II]
bchere8077@utm.edu.ec
https://orcid.org/0000-0003-1886-6147

Juan Carlos Anchundia-Morales [III]
janchundia4517@utm.edu.ec
https://orcid.org/0000-0002-7607-9363

Correspondencia: erazoismael@yahoo.com

***Recibido:** 18 de enero de 2022 ***Aceptado:** 20 de enero de 2022 *** Publicado:** 26 de enero de 2022

I. Investigador Independiente, Experto en Sistema de Control y Automatización, Master en Energía Eléctrica y Electrotecnia en ASTRAKHAN STATE TECHNICAL UNIVERSITY, Ingeniero Eléctrico de la Universidad Técnica Luis Vargas Torres de Esmeraldas, Ecuador.
II. Ingeniero Eléctrico, Instituto de Posgrado, Maestría de Investigación en Electricidad, Mención Sistemas Eléctricos de Potencia en la Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.
III. Ingeniero Eléctrico, Instituto de Posgrado, Maestría de Investigación en Electricidad, Mención Sistemas Eléctricos de Potencia en la Universidad Técnica de Manabí, Portoviejo, Ecuador.

Resumen

En el presente trabajo tiene como objetivo principal encontrar el modelo matemático que describe un motor eléctrico en DC, el cual estará enlazado con un sistema mecánico y una vez desarrollado el modelo matemático del motor se transformaran las ecuaciones diferenciales que describen el modelo a la representación de un modelo de espacios de estados con el fin de diseñar un lazo de retroalimentación de estados para controlar y manipular las variables de posición, velocidad angular y corriente. La técnica que utilizaremos para realizar el modelo de retroalimentación de estados será por método Ackerman y del seguimiento de referencia, cabe indicar que calcularemos las ganancias de retroalimentación de estados y realizaremos la modelación con el software de MATLAB para comprobar los resultados.

Palabras clave: Espacios de estados; estabilidad; controlabilidad; observabilidad; control por realimentación de estados.

Abstract

The main objective of this work is to find the mathematical model that describes a DC electric motor, which will be linked to a mechanical system and once the mathematical model of the motor has been developed, the differential equations that describe the model will be transformed into the representation of a state space model in order to design a state feedback loop to control and manipulate position, angular velocity and current variables. The technique that we will use to perform the state feedback model will be by Ackerman method and reference tracking, it should be noted that we will calculate the state feedback gains and perform the modeling with the MATLAB software to check the results.

Keywords: State spaces; stability; controllability; observability; state feedback control.

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é encontrar o modelo matemático que descreve um motor elétrico DC, que será vinculado a um sistema mecânico e uma vez desenvolvido o modelo matemático do motor, as equações diferenciais que descrevem o modelo serão transformadas em a representação de um modelo de espaço de estados para projetar uma malha de realimentação de estados para controlar e manipular as variáveis de posição, velocidade angular e corrente. A técnica que utilizaremos para realizar o modelo de realimentação de estado será pelo método de Ackerman e rastreamento de referência, cabe ressaltar que iremos calcular os ganhos de realimentação de estado e realizar a modelagem com o software MATLAB para verificar os resultados.

Palavras-chave: Espaços de estados; estabilidade; controlabilidade; observabilidade; controle por realimentação de estado.

Introducción

En ingeniería de control una representación de espacio de estado es un modelo matemático de un sistema físico de un conjunto de variables de entrada salida y estado relacionadas entre sí mediante ecuaciones diferenciales o de primer orden. Las variables de estado son variables cuyos valores cambian con el tiempo de una manera que depende de su valor actual y del valor impuesto externamente de la variable de entrada. El valor de las variables de salida depende del valor de las variables de estado. Si el sistema dinámico es lineal, invariable en el tiempo y de dimensión finita, entonces las ecuaciones diferenciales y algebraicas pueden escribirse en forma matricial.

Las variables de estado se agrupan en el llamado vector de estado y el espacio n dimensional que determinan los posibles valores de esas variables que se denominan espacio de estados. La dinámica de un sistema se puede describir en función del valor del vector de estados y de la señal de entrada (asumiendo que el sistema es no autónomo mediante el método de espacio de estado se caracteriza por una algebraización significativa de la teoría general de sistemas) (Interiano, n.d.).

Desarrollo

Modelos de control en espacios de estado

Es un modelo matemático de un sistema físico que se describe mediante un conjunto de entradas, salidas y variables de estado relacionadas mediante ecuaciones diferenciales de primer orden que se combinan para formar una matriz de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Para pasar el número de entradas, salidas y estados las variables se representan como vectores, y las ecuaciones algebraicas se escriben como matrices, esto solo se puede hacer cuando el sistema dinámico es lineal e inmutable en el tiempo, el estado del sistema se puede representar como un vector en este espacio (Pérez, 2008).

Variables de estado

La variable de estado es el subconjunto más pequeño de las variables del sistema que puede representar su estado completamente dinámico en un momento dado. El número mínimo de variables de estado necesarias para representar un sistema dado n suele ser del orden de la ecuación diferencial que define el sistema. En la Figura 1 se puede apreciar el diagrama de bloques del espacio de estados de un sistema sin retroalimentación.

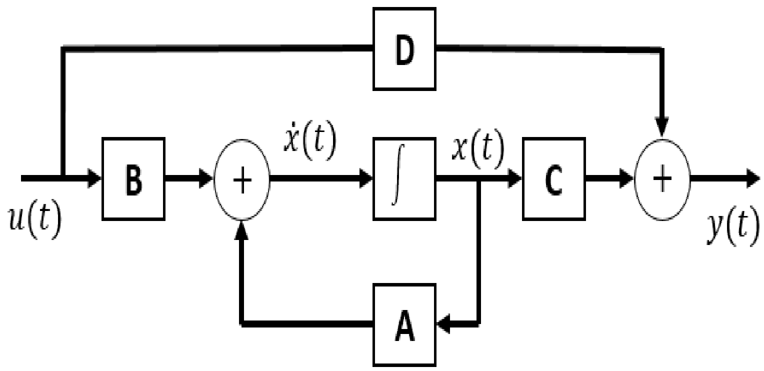

Figura 1. Diagrama de bloques del sistema por espacios de estados.

Observando el diagrama de bloques de la Figura 1 podemos calcular las ecuaciones de sistema en espacios de estados:

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + B\,u \qquad \text{Ecuación de estados (1)}$$

$$y = C\,x + D\,u \qquad \text{Ecuación de salida (2)}$$

Donde:

- A -Es una matriz estados (n x n) de valores constantes.
- B -Es una matriz de entrada (n x1).
- C - Es la matriz de salida (1x n).
- D - Matriz de paso (n x1).
- x - Vector de variable de estados.
- y - Vector de variable de salida.
- u - Señales de entrada de sistema.

Estos sistemas pueden tener tanto como una sola señal de entrada y de salida, así como múltiples señales de entradas y múltiples variables de salida a controlar, los sistemas que tienen muchas múltiples entradas como salida se llaman sistemas MIMO (Di Sciascio, 2016).

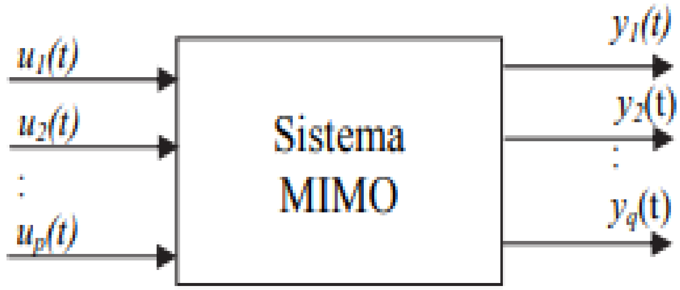

Figura 2. Sistema MIMO en espacios de estados.

Estabilidad de un sistema en espacios de estados

La estabilidad de un sistema puede considerarse como la continuidad en su comportamiento dinámico, si hay un pequeño cambio en las entradas o condiciones iniciales un sistema estable y exhibirá pequeños camios en su respuesta a perturbaciones**.** Como la respuesta de los sistemas dinámicos lineales se descompone en la respuesta a entrada con condiciones iniciales nulas, y la respuesta a condiciones iniciales con entrada nula, podemos hablar de dos tipos de estabilidad.

Existen dos tipos de análisis de estabilidad que se deben realizar a un sistema dinámico que describa el modelo físico de sistema real a controlar, estos análisis son los siguientes:

Estabilidad externa: La estabilidad externa o entrada-salida se refiere a la estabilidad del sistema con condiciones iniciales cero y la estabilización externa describe el efecto del ruido en las entradas sobre el funcionamiento de las salidas del sistema.

Estabilidad interna: Estabilidad interna nos indica la estabilidad del sistema autónomo sin entrada, la estabilidad interna describe el efecto de las perturbaciones en las condiciones iniciales sobre el comportamiento dinámico de los estados del sistema (Cap ´ Estabilidad, n.d.).

Controlabilidad del sistema

La condición de controlabilidad del estado implica que es posible, mediante entradas admisibles, dirigir los estados desde cualquier valor inicial a cualquier valor final dentro de una ventana de tiempo finita. Un modelo de espacio de estado lineal continuo e invariante en el tiempo es controlable si se cumple que el rango de la matriz de la ecuación 3 es máximo o total.

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} = n,$$

(3) Matriz de controlabilidad

Observabilidad del sistema

La matriz de observabilidad de un sistema nos indica la medida de cuán correctamente los estados internos de un sistema pueden ser inferidos conociendo las salidas externas. La observabilidad y la controlabilidad de un sistema son duales matemáticos, es decir, como la controlabilidad establece que hay una entrada disponible que lleva cualquier estado inicial a cualquier estado final deseado, la observabilidad establece que conocer una trayectoria de salida proporciona suficiente información para predecir el estado inicial del sistema.

Un modelo de espacio de estado lineal continuo e invariante en el tiempo es observable si y solo si se cumple que el rango de matriz de la ecuación es completa total (Rodrigo Andrés Franco Luna, n.d.).

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix} = n.$$

(4) Matriz de observabilidad

Control por Realimentación de Estados

El enfoque de posición de polo, como lo usaremos más adelante para diseñar el sistema de control, asume que todas las variables de estado están disponibles para respuesta, sin embargo, en la práctica no todas las variables están disponibles. Tal afirmación permite insistir en una comparación entre la concepción del observador de orden completo y la de orden mínimo, de las cuales el primero será objeto de análisis, y el segundo concepto será considerado en lo que sigue y en donde ambos serán discutidos con más detalle respectivamente.

Vale destacar que el diseño mediante la ubicación de polos y el diseño del observador son independientes el uno del otro, por lo que diseñaremos por separado sin inconvenientes, en la cual finalmente los combinaremos para formar el sistema de control mediante la realimentación del estado observado (Cap ´ Estabilidad, n.d.).

Los métodos clásicos de diseño no permiten especificar todos los polos a lazo cerrado de sistemas de orden superior a dos, esto es porque al realimentar la salida no disponemos del número suficiente de grados de libertad de parámetros para ubicar de manera independiente todos los polos a lazo cerrado.

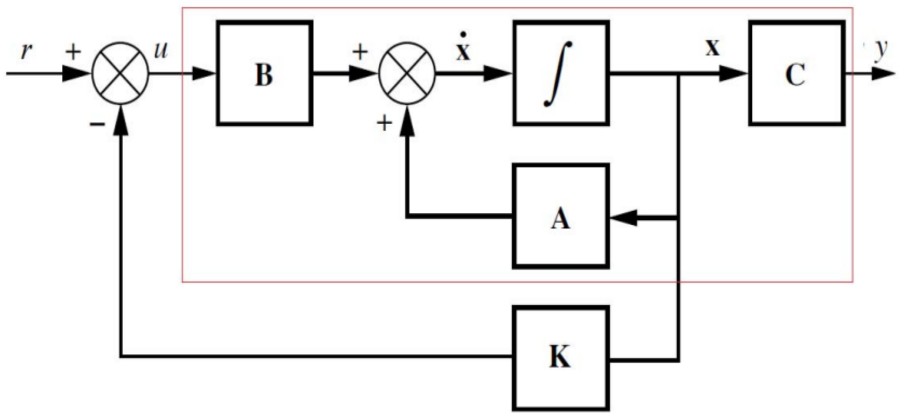

Figura 3. Diagrama de bloques de un lazo de retroalimentación en espacios de estados.

Del diagrama de bloque de la Figura 3 se pueden sacar las siguientes fórmulas para realizar el laso de retroalimentación de estados y sacar las siguientes ecuaciones:

$$U(t) = r(t) - K x \qquad (4) \quad \text{Ecuación de control}$$

$$\frac{dx}{dt} = (A - KB)\, x(t) + B\, u\,(t) + B\, r\,(t) \qquad (5) \text{ Ecuación dinámica de sistema}$$

$$y = C\, x \qquad (6) \quad \text{Ecuación de salida}$$

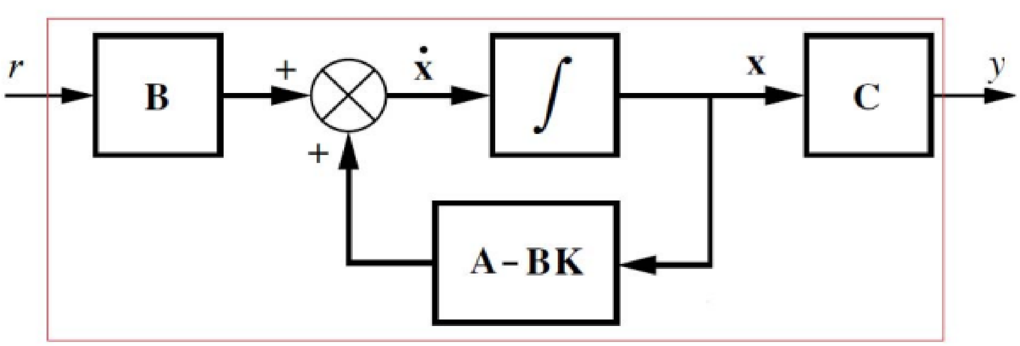

Figura 4. Lazo de retroalimentación con ganancia.

Teoremas imprescindibles para lazo de retroalimentación

Teorema 1: Asignación de autovalores, si el par (A, B) es controlable, entonces mediante la realimentación de estados u(t) = r(t) – Kx(t), donde K es un vector fila real constante, los autovalores de A-BK pueden ser asignados arbitrariamente, siempre que los autovalores complejos conjugados se asignen en pares.

Teorema 2: La realimentación de los estados puede mover los polos, pero no tiene ningún efecto sobre los ceros.

Teorema 3: La Controlabilidad de una planta es invariante con respecto a la realimentación de los estados. Por lo tanto, si el par [A, B] es controlable, para cualquier vector K, el par [(A-BK), B] también es controlable.

Teorema 4: La Observabilidad de un sistema de lazo cerrado puede ser destruida por la realimentación de los estados, esto es la Observabilidad de un sistema no es invariante con respecto a la realimentación de los estados (Mago-Ramos et al., 2016).

Problema del motor electromecánico DC

Como ejemplo demostrativo y practico vamos a tomar como ejemplo el problema de un motor electromecánico, donde analizaremos el modelo matemático y aplicaremos todo el conocimiento y los conceptos explicados el presente articulo:

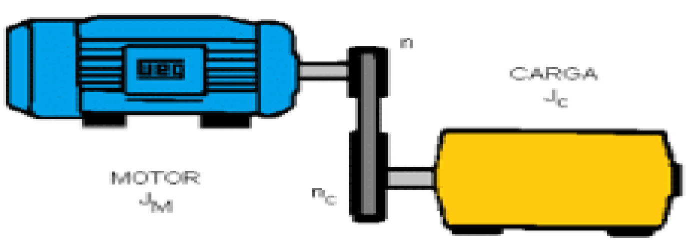

Figura 5. Sistema electromecánico.

Para abordar el problema del motor de electromecánico, es necesario realizar un diagrama que simplifique e introduzcas todas las variables de estados y de salida del sistema para lo cual representaremos el esquema matemático de la Figura 5.

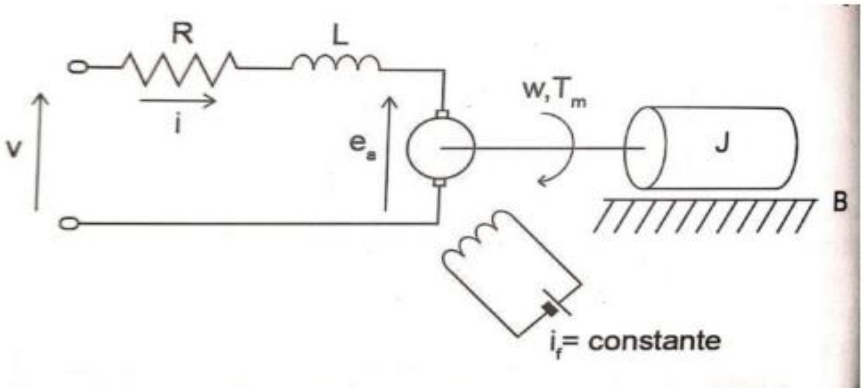

Figura 6. Circuito equivalente del proceso o sistema.

Observando el esquema de circuito equivalente ya podemos realizar el análisis del modelo matemático del proceso y lo describiremos a continuación:

En el circuito de la Figura 6 podemos ver que está conformado por partes dos partes:

La primera es un circuito eléctrico RL y el segundo es un sistema mecánico con un eje de rotación, por lo cual analizaremos el sistema en tres partes, las cuales son el circuito RL, la fuente de excitación dado por la corriente y por último el circuito mecánico de rotación, para finalmente sacar las tres ecuaciones que representaran el sistema en variables de estados.

Pero antes vas a definir la señal de entrada, variables de estados del sistema y las variables de salida:

Señal de entrada: Es el voltaje V el cual representa una fuente de alimentación.

Variables de estados: Las variables de estados que queremos manipular del sistema serán la corriente I, la velocidad angula ω y el ángulo Ɵ.

Variables de salida: La variable que deseamos controlar será la velocidad angula ω, la cual queremos que sea de 1500 RPM para este caso en específico.

Metodología

Análisis del modelo matemático

Primero analizaremos el circuito RL el cual aplicando la ley de Kirchhoff obtenemos lo siguiente:

$$V(t) = R\,I + L\,\frac{dI}{dt} + e_a \qquad [1]$$

Segundo vamos a calcular la fuente de excitación de corriente de la armadura la cual es la responsable de producir el toque mecánico T_m.

$$e_a = K_a\,\omega \qquad [2]$$

$$T_m = K_m\, I \qquad [3]$$

Finalmente analizaremos el eje mecánico de rotación del sistema el usando las leyes de Newton para el momento mecánico tenemos lo siguiente:

$$T_m = J\frac{d\omega}{dt} + B\,\omega \qquad [4]$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad [5]$$

Donde:

R – Resistencia eléctrico del circuito en Ω.

L – Indicación que representa las bobinas del motor eléctrico en mH.

J – El momento de inercia del eje mecánico en Kg m^2.

K_m - Constante de toque mecánico.

K_a – Constante de excitación eléctrica.

B- Constante elástica de amortiguamiento.

Teniendo las cinco ecuaciones que describen el funcionamiento del motor electromecánico, vamos a llevarlo a espacio de las variables de estados I, ω y Θ, necesitamos crear un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma

$$\frac{dx}{dt} = A\,x + B\,u \text{ - Ecuación de variables de estados}$$

Realizando un poco de algebra, remplazando y poniendo las ecuaciones [1], [4] y [5] en función de las variables de estados obtenemos lo siguiente:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} - \frac{R\,I}{L} - \frac{\mathrm{Ka}\,\omega}{L}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{Km}\,\mathrm{I}}{J} - \frac{\mathrm{B}\,\omega}{j}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Este sistema la podemos el representar en forma matricial de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(I) \\ \frac{d}{dt}(\omega) \\ \frac{d}{dt}(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{Ka}{L} & 0 \\ \frac{Km}{J} & -\frac{B\omega}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

$$\mathbf{Y = [\ 0\ 1\ 0]\ X}$$

Observando esta forma matricial del sistema podemos ver la variable de control es ω, continuación en el software Matlab vamos a analizar, la estabilidad, controlabilidad, observabilidad y realizaremos el lazo de retroalimentación de estados siguiendo una referencia de 1500 rpm.

Resultados

Código de programación y simulación en Matlab

```
clear all
clc
%datos
R=1.2;
L=4;
B=1.76;
K1=0.89;
K2=0.926;
J = 2.68

% MODELO EN ESPACIO DE ESTADOS
 A=[ -R/L  -K1/L 0; K2/J -B/J 0;0 0 1];
 B=[1/L;0;0];
 C=[0 1 0];
 D=0;


 % ANALISIS DE ESTABILIDAD, CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIAD

Estabilidad = eig(A);

%Se calculan los autovalores de la matriz A son negativos en su parte %real se
dicen que el sistema es estable caso contrario es inestable
```

```
Estabilidad =

         0
   -1.6017
   -0.4583
```

```
% Grafica de sistema para ver la estabilidad de sistema

SISTEMA =ss(A,B,C,D);

impulse(SISTEMA);

grid on
```

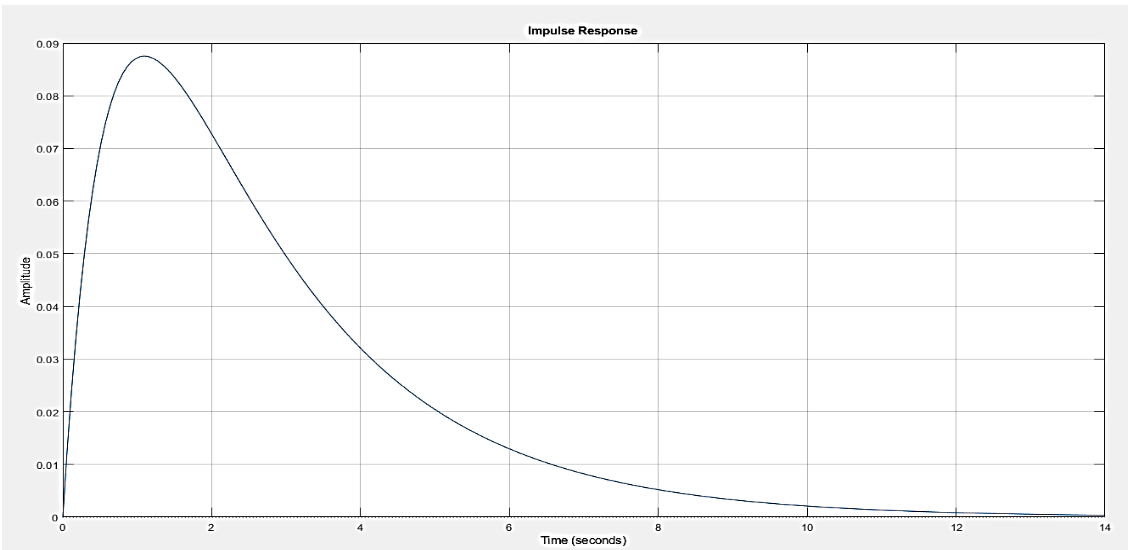

Figura 7. Curva de estabilidad del sistema.

Observando la curva de la Figura 7 vemos como el sistema responde a una entrada de tipo impulso delta Dirac y de esa grafica podemos concluir que el sistema es estable.

```
disp('MATRIZ DE CONTROLABILIDAD')

Controlabilidad = ctrb(A,B);

 disp('RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD')

rank(Controlabilidad);

 disp('MATRIZ DE OBSERVABILIDAD')
Observabilidad= obsv(A,C);

disp('RANGO DE LA MATRIZ DEOBSERVABILIDAD ')

 rank(Observabilidad);
```

```
Command Window
MATRIZ DE CONTROLABILIDAD

Controlabilidad =

    0.2500   -0.0750    0.0033
         0    0.0864   -0.0826
         0         0         0

RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD

ans =

     2

MATRIZ DE OBSERVABILIDAD

Observabilidad =

         0    1.0000         0
    0.3455   -0.6567         0
   -0.3306    0.3544         0

RANGO DE LA MATRIZ DEOBSERVABILIDAD

ans =

     2
```

Observando los resultados que nos entregó Matlab, viendo los rangos de la matriz de controlabilidad y observabilidad podemos decir que el sistema no es controlable ni observable, pero si el intercambio de la fila 1 por la fila 3 y volvemos a calcular la controlabilidad y observabilidad vemos que es rango total.

```
% INTERCAMBIO DE LA FILA 1 Y 3

A =[0 0 1 ; K2/J  -B/J  0; -R/L  -K1/L  0];

B=[1/L;0;0];

C=[0 1 0];

D=0;

disp('MATRIZ DE CONTROLABILIDAD')

Controlabilidad = ctrb(A,B);

disp('RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD')

rank(Controlabilidad);

disp('MATRIZ DE OBSERVABILIDAD')

Observabilidad= obsv(A,C);
```

```
disp('RANGO DE LA MATRIZ DE OBSERVABILIDAD ')
 rank(Observabilidad);
```

```
Command Window
MATRIZ DE CONTROLABILIDAD

Controlabilidad =

    0.2500         0   -0.0750
         0    0.0193   -0.0113
         0   -0.0750   -0.0043

RANGO DE LA MATRIZ DE CONTROLABILIDAD

ans =

     3

MATRIZ DE OBSERVABILIDAD

Observabilidad =

         0    1.0000         0
    0.0772   -0.5833         0
   -0.0450    0.3403    0.0772

RANGO DE LA MATRIZ DE OBSERVABILIDAD

ans =

     3

fx >>
```

Observando el nuevo resultado vemos que el sistema es controlable y observable ya que el rango de matrices de controlabilidad y observabilidad son máximos es decir 3.

```
% REPRESENTACION DE LOS ESPACIOS DE ESTADOS EXTENDIDO

Aa =[A zeros(length(A),1);-C 0];

Ba =[B;0];

Ca=[C 0];

Da=0;

Ea=[ zeros(length(A),1); 1 ];


Sistema2=ss(Aa,Ea,Ca,Da);

% REPRESENTACION DE LOS ESPACIOS DE ESTADOS EXTENDIDO

Aa =[A zeros(length(A),1);-C 0];

Ba =[B;0];

Ca=[C 0];
```

```
Da=0;
Ea=[ zeros(length(A),1); 1 ];

Sistema2=ss(Aa,Ea,Ca,Da);

% CAMBIO DE LOS POLOS DEL SISTEMA

Polos = [-4.2+ 2.6i, -3.8 + 0.65i, - 2.6+ 0.98i, -1.65-11i];

% COEFICIENTE DE LA ECUACION CARACTERISTICA DESEADA

Ecuacion_caracteristica = poly(Polos);

Raices= roots (Ecuacion_caracteristica);

% CALCULO DE LA CONSTANTE DE GANANCIA EN LASO DE RETROALIMENTACION

Kg = acker (Aa,Ba,Raices);
```

```
Kg =

   1.0e+20 *

     0.0000    6.4022    1.6468   -4.1010
```

```
% CALCULO DE LA CONSTANTE DE GANANCIA EN LASO DE RETROALIMENTACION

Kg = acker(Aa,Ba,Raices);

Ar= Aa -Ba*Kg;

SISTEMA_2 = ss(Ar,Ea,Ca,Da)

figure

1500*step(SISTEMA_2)
```

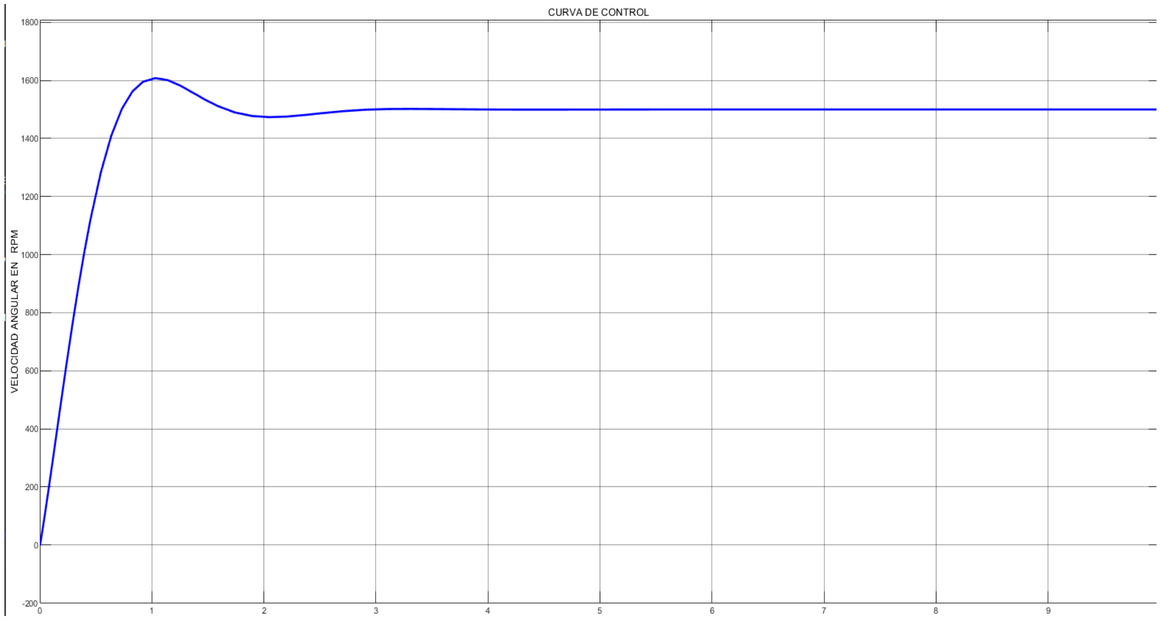

Figura 8. Respuesta final del sistema.

Conclusiones

Observando el resultado de la gráfica de la Figura 8 podemos decir que el sistema alcanza la estabilidad a los 5 segundos teniendo un valor de 1500 RPM que era lo que se buscaba llegar para la velocidad angular.

Podemos también concluir que los la técnica de retroalimentación por espacios de estados es una técnica muy aplicada en el área de control y es una manera muy eficiente de automatizar un proceso cuando el sistema tiene múltiples entradas y salidas.

Referencias

1. Cap ´ Estabilidad. (n.d.).
2. Di Sciascio, F. (2016). *Control Por Realimentación De Estados*. *0*, 29–31.
3. Interiano, E. (n.d.). *Control Automático Contenido*.
4. Mago-Ramos, M. G., Vallés-Defendine, L., Olaya-Flórez, J. J., & Palomino-Naranjo, C. (2016). Aplicación del modelo de control en espacios de estado a partir de las pérdidas totales obtenidas del porcentaje de carbono de la chapa de acero al silicio. *Iteckne*, *13*(2), 127. https://doi.org/10.15332/iteckne.v13i2.1477

5. Perez, M. A. (2008). Unidad1Y2. *"Introduccion a Los Sistemas De Control Y Modelo Matemático Para Sistemas Lineales Invariantes En El Tiempo.,"* 1–69.
6. Rodrigo Andres Franco Luna. (n.d.). *Tutorial 1 - Realimentación de variables de estado*.