



DOI: <http://dx.doi.org/10.23857/dc.v7i3.2056>

Ciencias técnicas y aplicadas
Artículo de investigación

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Optimal surfaces of different geometric shapes to dematerialize production

Superfícies ótimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar a produção

Fredy Rodrigo Barahona-Avecilla^I

fbarahona@unach.edu.ec

<http://orcid.org/0000-0002-9969-5353>

Celin Abad Padilla-Padilla^{III}

c_padilla@esepoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-2241-5421>

Olga Beatriz Barrera-Cárdenas^{II}

obarrera@esepoch.edu.ec

<http://orcid.org/0000-0002-9708-5105>

Luis Fernando Buenaño-Moyano^{IV}

lfbuenanio@esepoch.edu.ec

<https://orcid.org/0000-0002-2194-4102>

Correspondencia: fbarahona@unach.edu.ec

***Recibido:** 22 de mayo del 2021 ***Aceptado:** 20 de junio del 2021 * **Publicado:** 05 de julio del 2021

- I. Magister en Matemática Básica, Universidad Nacional de Chimborazo, Facultad de Ingeniería, Riobamba, Ecuador.
- II. Magíster en Matemática Básica, Magister en Docencia Universitaria e Investigación Educativa, Especialista en Computación Aplicada al Ejercicio Docente, Doctora en Matemáticas, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Carrera de Ingeniería Automotriz, Riobamba, Ecuador.
- III. Magíster en Diseño Mecánico Mención en Fabricación de Autopartes de Vehículos, Máster en Ingeniería de Vehículos Híbridos y Eléctricos, Ingeniero Automotriz, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Carrera de Ingeniería Automotriz, Riobamba, Ecuador.
- IV. Magíster en Gestión del Mantenimiento Industrial, Ingeniero Automotriz, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Mecánica, Carrera de Ingeniería Automotriz, Riobamba, Ecuador.

Resumen

En este trabajo, con la ayuda de las ecuaciones pertinentes y el software matemático se realizó una comparación de la medida de superficie de los cuerpos geométricos para un determinado volumen, entre estos están los poliedros, el cilindro y los prismas de base poligonal regular, el cono y las pirámides de base poligonal regular y algunas superficies de revolución como el paraboloide y el hiperboloide, con respecto a la más óptima es decir la de menor medida de superficie la esfera. Como resultado se registró que el Hiperboloide de una hoja es el de mayor medida de superficie. Adicionalmente se encontró que el cilindro y los prismas, así como el cono y las pirámides tienen proporcionalidades entre el radio de la base del cilindro y la medida de la arista de una base poligonal de n lados o el radio de la base del cono y la medida de la arista de la base poligonal de n lados que permitieron construir la tabla 3 y tabla 4. Este resultado permite dentro de la ingeniería proyectar de una manera rápida cuerpos geométricos óptimos, de manera que se pueda diseñar elementos respetando el ambiente, es decir utilizando solo los recursos necesarios y evitando reciclar mayor cantidad de materiales.

Palabras clave: Volumen; superficie; optimización; recursos; producción.

Abstract

In this work, with the help of the pertinent equations and mathematical software, a comparison of the surface measurement of the geometric bodies for a given volume was made, among these are the polyhedra, the cylinder and the regular polygonal-based prisms, the cone and pyramids with a regular polygonal base and some surfaces of revolution such as the paraboloid and the hyperboloid, with respect to the most optimal, that is, the sphere with the smallest surface area. As a result, it was recorded that the Hyperboloid of a leaf is the one with the largest surface area. Additionally, it was found that the cylinder and prisms, as well as the cone and pyramids have proportionalities between the radius of the cylinder base and the edge measure of a polygonal base with n sides or the radius of the cone base and the Measurement of the edge of the n -sided polygonal base that allowed the construction of table 3 and table 4. This result allows within engineering to quickly project optimal geometric bodies, so that elements can be designed respecting the environment, that is, using only the necessary resources and avoiding recycling more materials.

Keywords: Volume; surface; optimization; resources; Production.

Resumo

Neste trabalho, com o auxílio das equações pertinentes e de softwares matemáticos, foi feita uma comparação das medidas de superfície dos corpos geométricos para um determinado volume, entre estes estão os poliedros, o cilindro e os prismas regulares de base poligonal, o cone e pirâmides com base poligonal regular e algumas superfícies de revolução como o parabolóide e o hiperbolóide, em relação ao mais ótimo, ou seja, a esfera com a menor área de superfície. Como resultado, foi registrado que o hiperbolóide de uma folha é aquele com a maior área de superfície. Adicionalmente, verificou-se que o cilindro e prismas, assim como o cone e as pirâmides possuem proporcionalidades entre o raio da base do cilindro e a medida da borda de uma base poligonal com n lados ou o raio da base do cone e a Medida do borda da base poligonal de n lados que permitiu a construção da tabela 3 e da tabela 4. Este resultado permite dentro da engenharia projetar rapidamente corpos geométricos ótimos, de forma que os elementos possam ser projetados respeitando o meio ambiente, ou seja, utilizando apenas os recursos necessários e evitando reciclar mais materiais.

Palavras-chave: Volume; superfície; otimização; meios; Produção.

Introducción

Los insumos requeridos para la industrialización de bienes según (Filippone et al., 2005) tienen un rendimiento muy bajo, enfrentar la contaminación para un desarrollo sostenible debe proponer la desmaterialización de la producción; es decir: maximizar la producción con menos materiales.

Ecoembes (2005, como se citó Filippone et al., 2005) el destino de los envases y embalajes luego de cumplir su función el destino es la basura y el vertedero representando un problema ecológico por los volúmenes desechos. En Fiksel (1996, como se citó Filippone et al., 2005) el tratamiento de residuos puede ser minimizado desde el punto de vista ambiental con la optimización del uso de materiales.

Aunque la arquitectura haya cambiado a lo largo de la historia y estilos visiblemente diferentes se hayan sucedido uno tras otro, en realidad, desde los primeros egipcios hasta nuestros días, la arquitectura se ha apoyado en una geometría simple que hace uso de líneas, figuras bidimensionales y poliedros clásicos combinados con esferas, elipses y círculos. Esta arquitectura era siempre fruto

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

de planos: unos planos producidos gracias a instrumentos básicos como el compás y la escuadra, y seguidos al pie de la letra por los albañiles de todos los tiempos (Roe, 2012, p.8).

Existen arquitectos que se refieren a la forma, es el caso de Méndez (2002) la geometría de las formas arquitectónicas y la mecánica de las estructuras van juntas. El diseño formal debe intuir si la forma que se esboza resistirá, su visión de cómo se deformará. La arquitectura es piel y esqueleto, es optimizar los materiales, sostenibilidad, servicio social, es todas juntas como un sistema tomando en cuenta la opinión oportuna y autorizada, del trabajo del ingeniero estructural (p. 85).

Gaudí, Candela y Müther utilizaron el paraboloides hiperbólico en sus diseños, este último logró cubrir grandes claros libres de apoyos por medio de sus delgados cascarones de concreto, con un mínimo de espesor y dándoles la resistencia adecuada gracias a su forma, utilizando superficies de paraboloides hiperbólicos. Müther decide también optar por un cascarón cuya forma deriva de tres cuartos de una esfera, variando así la forma tradicional de media esfera (Oliva, 2007, p.289).

El conocimiento de los cuerpos geométricos pueden constituirse en herramientas para el estudio de la etnomatemática y la etnogeometría como por ejemplo Hoz, Trujillo y Tun (2017) han aplicado en el de vivienda tradicional de la comunidad Arhuaca de la sierra nevada de Santa Marta en la que en su proceso de construcción tradicional se basa en patrones y figuras geométricas analizando sus matemáticas dentro de su propio contexto sociocultural, la base cuadrada es utilizado para maximizar el área de la vivienda. También se pueden identificar el paralelismo y la perpendicularidad del proceso al aplicar el teorema de Thales. Se aplican área y volumen, siendo el volumen de la vivienda el de un paralelepípedo.

Raynaud (2008), el reemplazo en el accionar arquitectónico no implica únicamente tomar un objeto del entorno y sustituirlo por otro probablemente optimizado, en el fondo y materialmente es semejante; supone además el reto de crear un elemento que imaginariamente considere contenidos conceptuales de bienestar, prosperidad, perfeccionamiento, progreso, comunes a los humanos en el tiempo y que es imposible representarlo de una vez y para siempre.

Mediante sistemas informáticos de acceso libre cuyo uso se está potenciando en los últimos años en todos los niveles, ellos se pueden representar de forma dinámica e interactiva objetos geométricos basados en construcciones de regla y compás, pudiéndose modificar sus parámetros en cualquier momento, con la inmediata reconstrucción de todos y cada uno de los elementos asociados a los mismos en la pantalla de trabajo en cuestión (Falcón, 2012, p.4).

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Al relacionar el diseño con las matemáticas Sáenz (2015) dice que el cuerpo que mejor relación tiene entre el volumen y superficie es la esfera, entonces es importante plantear la siguiente pregunta: ¿Cómo varía la medida de superficie de los cuerpos geométricos?

Metodología

Se realizó un análisis comparativo de la medida de superficie de los cuerpos geométricos mediante la utilización de software matemático. Los cuerpos geométricos son: la esfera y los poliedros; el cilindro y los prismas de base poligonal regular; el cono y las pirámides también de base poligonal regular.

Se tomó como estándar de comparación la esfera de radio r_e , estableciendo las fórmulas del volumen V_e y superficie S_e , luego se desarrolló las fórmulas de volumen, aristas y superficie de los poliedros de 20 caras (icosaedro), 12 caras (dodecaedro), 8 caras (octaedro), 3 caras (tetraedro), en función del radio de la esfera r_e para facilitar la comparación para un mismo volumen V_e .

El mismo proceso se realizó para los prismas (se incluye el cilindro) y pirámides (se incluye el cono), desarrollando las fórmulas del lado del polígono regular de la base y la altura en función de r_e y superficie. Se realizó también el análisis con algunas superficies de revolución como el paraboloides y el hiperboloides.

La comparación se realizó respecto a la superficie de los cuerpos geométricos, por lo que es indispensable optimizar las dimensiones de los prismas y pirámides respecto de la superficie que tiene que ser mínima, se utiliza el procedimiento del cálculo diferencial, en el que se establece la fórmula de la superficie, se la deriva respecto a la altura, se determina el punto crítico, en este caso el mínimo.

Posteriormente se realizó una comparación total de los cuatro grupos para ver cuál es el óptimo respecto a la superficie.

Luego con la ayuda del software matemático se realizó las gráficas 3D de cuerpos geométricos optimizados con una medida mínima de superficie y volumen igual.

Resultados y discusión

Volumen y superficie de la esfera y Poliedros regulares

La esfera es el estándar para comparar la medida de la superficie de todos los cuerpos geométricos considerados en este estudio, se presenta la esfera y poliedros, se expone la fórmula del volumen correspondiente y se forma la ecuación con el volumen de la esfera V_e , se halla el valor de la arista del poliedro en función del radio de la esfera r_e y al final se determina la superficie en función de la arista. Este proceso se repite para todos los poliedros obteniéndose los siguientes resultados:

Esfera

El volumen de la esfera se calcula obteniendo un sólido de revolución a partir de una circunferencia con centro en el origen del plano cartesiano (x,y)

Si r_e es el radio de la esfera, V_e es el volumen, S_e es la superficie de la esfera, entonces:

$$V_e = \frac{4\pi r_e^3}{3} \quad (1)$$

$$S_e = 4\pi r_e^2 \quad (2)$$

Icosaedro

Si a_i es la arista del icosaedro y V_i es el volumen, S_i es la superficie del icosaedro, entonces:

$$V_i = 2.1817a_i^3 \quad (3)$$

$$V_i = V_e \quad (4)$$

$$a_i = \sqrt[3]{\frac{4\pi r_e^3}{3(2.1817)}} \quad (5)$$

$$S_i = 5\sqrt{3}a_i^2 \quad (6)$$

Dodecaedro

Si a_d es la arista del dodecaedro y V_d es el volumen, S_d es la superficie del dodecaedro, entonces:

$$V_d = 7.663 a_d^3 \quad (7)$$

$$V_d = V_e \quad (8)$$

$$a_d = \sqrt[3]{\frac{4\pi r_e^3}{3(7.663)}} \quad (9)$$

$$S_d = \frac{15a_d^2}{\tan 36^\circ} \quad (10)$$

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Octaedro

Si a_o es la arista del octaedro y V_o es el volumen, S_o es la superficie del octaedro, entonces:

$$V_o = \frac{\sqrt{3}a_o^3}{2} \quad (11)$$

$$V_o = V_e \quad (12)$$

$$a_o = \sqrt[3]{\frac{12\pi r_e^3}{3\sqrt{2}}} \quad (13)$$

$$S_o = 2\sqrt{3}a_o^2 \quad (14)$$

Hexaedro

Si a_h es la arista del Hexaedro y V_h es el volumen, S_h es la superficie del Hexaedro, entonces:

$$V_h = a_h^3 \quad (15)$$

$$V_h = V_e \quad (16)$$

$$a_h = \sqrt[3]{\frac{4\pi r_e^3}{3}} \quad (17)$$

$$S_h = 6a_h^2 \quad (18)$$

Tetraedro

Si a_t es la arista del Tetraedro y V_t es el volumen, S_t es la superficie del Tetraedro, entonces:

$$V_t = \frac{\sqrt{2}a_t^3}{12} \quad (19)$$

$$V_t = V_e \quad (20)$$

$$a_t = \sqrt[3]{\frac{48\pi r_e^3}{3\sqrt{2}}} \quad (21)$$

$$S_t = \sqrt{3}a_t^2 \quad (22)$$

Cilindro circular recto y prismas de base poligonal regular

La esfera continúa representando el estándar para comparar la medida de la superficie del cilindro y prismas, se expone la fórmula del volumen correspondiente y se forma la ecuación con el volumen de la esfera V_e , se halla el valor del lado del polígono de la base en función del radio de la esfera r_e y al final se determina la superficie en función de la altura del prisma. Existe infinita cantidad de

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

prismas de diferente medida del lado y altura, por lo que se obtiene las dimensiones óptimas respecto a un mínimo de superficie. Este proceso se repite para el cilindro y todos los prismas obteniéndose los siguientes resultados:

Cilindro

Si h_c es la altura del cilindro, r_c es el radio de la base del cilindro y V_c el volumen, tomando como referencia el sistema de coordenadas (x, y) donde $y = r_c$, entonces:

$$V_c = \pi \int_0^{h_c} y^2 dx = \pi r_c^2 h_c \quad (23)$$

Para poder comparar con las superficies de los cuerpos geométricos anteriores, debemos hallar la superficie óptima del cilindro para un volumen determinado.

$$V_c = V_e = \pi r_c^2 h_c \quad (24)$$

Consideremos que el radio de la base es r_c , la altura es h_c , entonces la superficie del cilindro es:

$$S_c = 2\pi r_c^2 + 2\pi r_c h_c \quad (25)$$

De (24) y (25) se obtiene:

$$S_c = 2 \left(\pi r_c^2 + \frac{V_e}{r_c} \right) \quad (26)$$

Ahora, calculamos la superficie óptima del cilindro. Derivando respecto a r_c para encontrar el valor mínimo, se tiene que:

$$\frac{dS_c}{dr_c} = 2 \left(2\pi r_c - \frac{V_e}{r_c^2} \right) = 0 \quad (27)$$

$$r_c = r_e \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (28)$$

$$h_c = \frac{4r_e}{3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{2}{3}}} \quad (29)$$

$$S_c = 4\pi \left(\frac{3}{2} \right)^{\frac{1}{3}} r_e^2 \quad (30)$$

Prisma de base de n

Sea l_{pn} el lado del prisma de n lados, h_{pn} la altura, V_{pn} el volumen, S_{pn} la superficie, entonces:

$$V_{pn} = \frac{n l_{pn}^2 h_{pn}}{4 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (31)$$

$$V_{pn} = V_e \quad (32)$$

$$l_{pn} = \sqrt{\frac{16\pi r_e^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{3nh_{pn}}} \quad (33)$$

$$S_{pn} = \frac{8\pi r_e^3}{3h_{pn}} + \sqrt{\frac{16n\pi r_e^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)h_{pn}}{3}} \quad (34)$$

$$\frac{dS_{pn}}{dh_{pn}} = \frac{8\pi r_e^3 \pi h_{pn}^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) - 8\sqrt{\frac{16}{3}} r_e^3 \pi \sqrt{5r_e^3 \pi \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)h_{pn}}}{\sqrt{\frac{16}{3}} h_{pn}^2 \sqrt{5r_e^3 \pi \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)h_{pn}}} \quad (35)$$

Cono y pirámides de base poligonal regular

Continúa la esfera como el estándar para comparar la medida de la superficie del cono y pirámides, se expone la fórmula del volumen correspondiente y se forma la ecuación con el volumen de la esfera V_e se halla el valor del lado del polígono de la base en función del radio de la esfera r_e y al final se determina la superficie en función de la altura de la pirámide. Existe infinita cantidad de pirámides de diferente medida del lado y altura, por lo que se obtiene las dimensiones óptimas respecto a un mínimo de superficie. Este proceso se repite para el cono y todas las pirámides obteniéndose los siguientes resultados:

Cono

Si V_{co} es el volumen del cono, r_{co} es el radio de la base, h_{co} es la altura, la función $y = \frac{r_{co}}{h_{co}}x$ es la generatriz que parte desde el origen de coordenadas y S_{co} la superficie; entonces:

$$V_{co} = \pi \int_0^{h_{co}} \left(\frac{r_{co}}{h_{co}}x\right)^2 dx = \frac{\pi r_{co}^2 h_{co}}{3} \quad (36)$$

$$r_{co} = \sqrt{\frac{4r_e^3}{h_{co}}} \quad (37)$$

$$S_{co} = \pi \sqrt{4r_e^3 h_{co} + \frac{16r_e^6}{h_{co}^2}} + \pi \frac{4r_e^3}{h_{co}} \quad (38)$$

Ahora, calculamos la superficie óptima del cono. Derivando respecto a h_{co} para encontrar el valor mínimo, se tiene que:

$$\frac{dS_{co}}{dh_{co}} = \frac{-16r_e^6 \pi + 2r_e^3 \pi h_{co}^3 - 8r_e^3 \pi h_{co} \sqrt{r_e^3 h_{co} + \frac{4r_e^6}{h_{co}^2}}}{h_{co}^3 \sqrt{r_e^3 h_{co} + \frac{4r_e^6}{h_{co}^2}}} \quad (39)$$

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

$$\frac{dS_{co}}{h_{co}} = 0 \quad (40)$$

$$h_{co} = 3.174802103936399 r_e \quad (41)$$

Pirámide de base poligonal de n lados

Sea L_{pn} la longitud del lado de la base de n lados, H_{pn} la altura, Vol_{pn} el volumen y la superficie Sup_{pn} ; entonces:

$$Vol_{pn} = \frac{nL_{pn}^2 H_{pn}}{12 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (42)$$

$$Vol_{pn} = V_e \quad (43)$$

$$L_{pn} = \sqrt{\frac{16\pi r_e^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{nH_{pn}}} \quad (44)$$

$$Sup_{pn} = \frac{4\pi r_e^3}{H_{pn}} + \sqrt{\frac{16\pi^2 r_e^6}{H_{pn}^2} + 4n\pi r_e^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) H_{pn}} \quad (45)$$

$$\frac{dSup_{pn}}{dH_{pn}} = \frac{-16r_e^6 \pi^2 - 8r_e^3 \pi H_{pn} \sqrt{4r_e^6 \frac{\pi^2}{H_{pn}^2} + n\pi r_e^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) + 2nr_e^3 \pi H_{pn}^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}}{2H_{pn}^3 \sqrt{4r_e^6 \frac{\pi^2}{H_{pn}^2} + n\pi r_e^3 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}} \quad (46)$$

Superficies de revolución

Paraboloide de revolución

Consideremos que h_{pb} es la altura del paraboloide, p_{pb} el parámetro de la parábola, V_{pb} es el volumen y la superficie S_{pb}

La ecuación de la parábola en el sistema cartesiano

$$(x, y) \text{ es } y = \sqrt{p_{pb}x} \quad (47)$$

$$V_{pb} = \pi \int_0^{h_{pb}} p_{pb} x dx = \pi p_{pb} \frac{h_{pb}^2}{2} \quad (48)$$

$$V_{pb} = V_e$$

$$p_{pb} = \frac{8r_e^3}{3h_{pb}^2} \quad (49)$$

$$S_{pb} = \frac{\pi h_{pb}^2}{2r_e^3} \left(\frac{8r_e^3}{3h_{pb}^2} + \frac{16r_e^6}{9h_{pb}^4} \right)^{\frac{3}{2}} + 3h_{pb} \quad (50)$$

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

$$\frac{dS_{pb}}{h_{pb}} = 0 \quad (51)$$

$$h_{pb} = 1.1006424162982 r_e \quad (52)$$

Hiperboloides de revolución

La ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (53)$$

$$H_{hp} = 2h_{hp} \quad (54)$$

la altura, el volumen V_{hp} , la superficie S_{hp} ; entonces:

$$V_{hp} = 2\pi(a^2 h_{hp}) + 2\pi \frac{a^2 h_{hp}^3}{3b^2} \quad (55)$$

Luego,

$$V_{hp} = V_e \quad (56)$$

$$a = \sqrt{\frac{2r_e^3}{3\left(h_{hp} + \frac{h_{hp}^3}{3b^2}\right)}} \quad (57)$$

$$S_{hp} = 4 \frac{\pi a}{b^2} \int_0^{h_{hp}} \sqrt{b^4 + (a^2 + b^2)x^2} dx \quad (58)$$

$$h_{hp} = 0.8725 r_e \quad (59)$$

Introduciendo las ecuaciones en el software matemático se obtiene:

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Figura 1: Gráficos de los cuerpos geométricos $r_e=20u$; $V_e = 33510,21 u^3$, realizado en software matemático

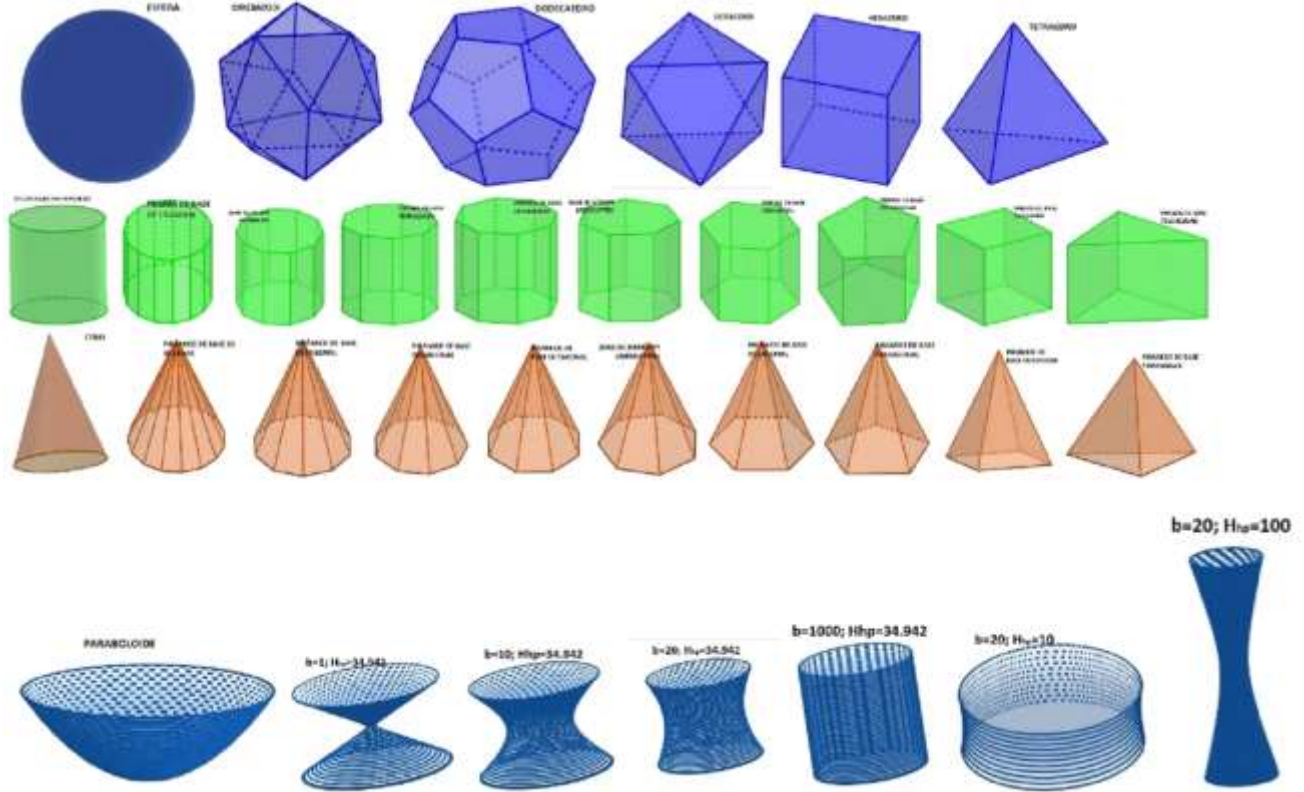


Tabla 1: Comparación de la medida de la superficie de la esfera y las formas geométricas $r_e=20u$, $V_e = 33510,21 u^3$

Cuerpo geométrico	Número de lados	Superficie u^2	Porcentaje respecto del de menor superficie
Esfera	Infinito	5026,54824574366	100
Poliedro	(Icosaedro) (20)	5351,22248933034	106,4591888
Poliedro	Dodecaedro (12)	5520,98709715634	109,8365484
Cilindro	infinito	5753,96136778424	114,4714243
Prisma	1000	5753,96767772695	114,4715498
Superficie cuádrica de revolución	Hiperboloide de una hoja $b=1000$, $Hhp=34.942$	5754,35169129796	114,4791895
Prisma	15	5782,36598210319	115,0365161
Prisma	10	5818,91924800208	115,7637202
Prisma	9	5834,71673509551	116,0780012
Prisma	8	5857,17794008396	116,5248527
Prisma	7	5890,75364508829	117,1928201
Prisma	6	5944,47983924021	118,2616688
Poliedro	Octaedro (8)	5944,47983924021	118,2616688
Prisma	5	6039,40284396463	120,150102
Prisma	4	6236,44334355320	124,0700982
Poliedro	Exaedro (6)	6236,44334355320	124,0700982
Cono	Infinito	6333,05394312459	125,992105

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Pirámide	1000	6333,06088811518	125,9922432
Pirámide	15	6364,31726646262	126,614069
Pirámide	10	6404,54934136517	127,4144607
Pirámide	9	6421,93672573111	127,7603718
Pirámide	8	6446,65848066257	128,2521955
Pirámide	7	6483,61332574746	128,9873887
Pirámide	6	6542,74665389733	130,1638089
Pirámide	5	6647,22293917950	132,2422986
Superficie cuádrica de revolución	Hiperboloide de una hoja b=20, Hhp=34.942	6728,88352792433	133,8668844
Prisma	3	6804,73073654941	135,3758166
Pirámide	4	6864,09407075528	136,5568127
Pirámide	3	7489,57528013443	149,0003659
Poliedro	Tetraedro (3)	7489,57528013443	149,0003659
Superficie cuádrica de revolución	Hiperboloide de una hoja b=20, Hhp=100	7928,79219375057	157,7383088
Superficie cuádrica de revolución	Paraboloide	8318,04225769369	165,4821928
Superficie cuádrica de revolución	Hiperboloide de una hoja b=10, Hhp=34.942	8678,69396961050	172,6571306
Superficie cuádrica de revolución	Hiperboloide de una hoja b=20, Hhp=10	9080,67326694503	180,6542546
Superficie cuádrica de revolución	Hiperboloide de una hoja b=1, Hhp=34.942	12330,26263244090	245,3027809

Tabla 2: Relaciones óptimas de la medida de la superficie del cilindro y los prismas de base poligonal regular

n lados de la base	Relación de superficies $\frac{S_{pn}}{S_c}$	Relación óptima $\frac{l_{pn}}{h_{pn}}$ <i>prisma</i> $\frac{r_c}{hc}$ <i>cilindro</i>	Proporcionalidad $\frac{l_{pn}}{r_c}$
3	1.182616688156494	1.732050807568877	2.929183775123045
4	1.083852140278578	1	1.845270148644028
5	1.049607819367461	0.72654252800536	1.384407613203961
6	1.033110836044653	0.577350269189626	1.117692795479829
7	1.023773582851969	0.481574618827085	0.940783444465337
8	1.017938349895363	0.414213562377101	0.813828386398859
9	1.014034742701508	0.36397023426708	0.717865412178749
10	1.011289245107124	0.324919696233265	0.642585091861746
15	1.004936531982642	0.212556561672756	0.42302484765198
1000	1.00001096625838	0.003141602989074	0.006283199087806
(Cilindro) ∞	1	0.5	0

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Tabla 3: Relaciones óptimas de la medida de la superficie del cono y las pirámides de base poligonal regular

n lados de la base	Relación de superficies $\frac{Sup_{pn}}{S_{co}}$	Relación óptima $\frac{L_{pn}}{H_{pn}}$ pirámide $\frac{r_{co}}{h_{co}}$ cono	Proporcionalidad $\frac{L_{pn}}{r_{co}}$
3	1.182616688156494	1.224744871391589	2.929183775123046
4	1.083852140278578	0.707106781186547	1.845270148644028
5	1.049607819367461	0.513743148373008	1.384407613203962
6	1.033110836044653	0.408248290463848	1.117692795479815
7	1.02377358285197	0.34052467860613	0.940783444452602
8	1.017938349895363	0.292893218813323	0.813828386396115
9	1.014034742701508	0.25736582080017	0.25736582080017
10	1.011289245107124	0.229752920547488	0.642585091861722
15	1.004936531982642	0.150300186143815	0.423024847651335
1000	1.000001096625838	0.002221448777366	0.006283199087802
Infinito (Cono)	1	0.353553390593274	0

Se puede dimensionar prismas y pirámides óptimos respecto a la superficie a partir del cilindro y cono respectivamente, por ejemplo, de la tabla 2 escogemos el radio del cilindro r_c de acuerdo a una necesidad de proyección geométrica cualquiera, luego, $r_c/h_c=0.5$, esto indica $r_c=0.5 h_c$, entonces para cualquier cilindro óptimo respecto a la superficie el radio de la base tiene que ser la mitad de la altura para un volumen determinado V_c (fórmula 24) y superficie S_c (fórmula 26). Para el mismo volumen se puede proyectar cualquier prisma óptimo respecto a la superficie; escojamos el de base hexagonal:

$$\frac{l_{p6}}{r_c} = 1.117692795479815;$$

luego

$$\frac{l_{p6}}{h_{p6}} = 0.577350269189626$$

finalmente tenemos que

$$\frac{S_{p6}}{S_c} = 1.033110836044653$$

De estas formas se ha dimensionado un prisma de base hexagonal óptimo respecto a la superficie. El mismo procedimiento se puede realizar con respecto a la tabla 3, para dimensionar una pirámide con base de n número de lados.

Según (Sanmartín et al., 2017), el tema ambiental ha ocupado un lugar importante en todos los aspectos científicos que impulsan decisiones en todo el mundo, a través de organizaciones que

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

intentan mitigar el problema, sin embargo, el problema aumenta en la acumulación de residuos en las zonas urbanas.

Una opción para mitigar el impacto es obviamente el reciclaje, sin embargo, algo complementario debe ser obligatoriamente el optimizar el uso de los materiales mediante la optimización de la superficie tomando en consideración la forma de envases y embalajes durante el diseño con las materias primas, lo que implica una reducción de la contaminación, proceso que debe repetirse luego de obtener materias primas producto del reciclaje.

Para optimizar, manifiesta Velázquez (2013), existen dos métodos: el gradiente mediante la representación de funciones continuas se las que se utiliza el cálculo de máximos y mínimos; luego el heurístico. Los primeros implican que los problemas a resolver están representados por funciones continuas de las que es necesario calcular sus derivadas para obtener sus máximos y mínimos. Por otra parte, los métodos heurísticos que utilizan iterativamente búsquedas pseudoaleatorias, controladas por reglas y hallan respuestas óptimas.

Mediante el uso de funciones continuas y derivadas se ha obtenido resultados óptimos, mediante la tabla 1 se puede elegir la forma geométrica óptima de la superficie tomando en consideración un mismo volumen. Con la tabla 2 se puede calcular un prisma óptimo utilizando constantes de proporcionalidad y mediante tabla 3 se puede calcular una pirámide óptima utilizando constantes de proporcionalidad.

El dimensionamiento óptimo de una forma geométrica ha sido revisado en este trabajo, es importante considerar lo que Annicchiarico (2007) indica que anteriormente, muchos de los diseños eran por experiencia e intuición, en vez de utilizar alguna teoría de optimización. Actualmente esta forma de pensar ha cambiado respecto de la optimización estructural. Sin embargo, este trabajo se enfoca a la optimización de la superficie respecto al volumen que implicaría diseñar elementos de paredes delgadas.

Conclusiones

Para un volumen determinado, las diferentes formas geométricas no tienen la misma medida de superficie.

Optimizar la superficie en función del volumen permite que se pueda construir elementos con una mínima utilización de materiales reduciendo el impacto ecológico.

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

Se debe considerar que la optimización al momento de diseñar en el campo de la ingeniería permite tomar menos elementos o recursos del ambiente y devolverlos de la misma forma en menor cantidad en forma de contaminantes, es decir habrá que reciclar menos.

Una prueba de que no se optimiza en el diseño de envases y embalajes es tener como oferta de cajas de cereales de forma de un prisma de base rectangular y alturas no optimas tomando en consideración el volumen y la medida de la superficie y también es evidente en el diseño de edificios.

Referencias

1. Annicchiarico, W. (2007). Una metodología para la optimización estructural de formas usando principios de evolución flexible distribuida. *Boletín Técnico*, 45(1), 35-52. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0376-723X2007000100002&lng=es&tlng=es.
2. Falcón, R. (2012). Modelado paramétrico de edificios en el aula de matemáticas. *Edmetec*, 1(2), 7-28. doi: <http://dx.doi.org/10.21071/edmetec.v1i2.2849>
3. Filippone, J., Candela, N., López, A., y Orihuela, R. (2017). Diseño Ecoeficiente de Envases y Embalajes No Reutilizables. *Información Tecnológica*, 16(3). https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-07642005000300008&lng=es&nrm=iso&tlng=es
4. Hoz de la, E., Trujillo, O., y Tun, M. (2017). La Geometría en la Arquitectura de la vivienda tradicional Arhuaca. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 10(1). Recuperado de <https://www.redalyc.org/jatsRepo/2740/274048277008/html/index.html>
5. Méndez, A. (2008). Arquitectura y Matemáticas según Jaume Serrallonga. *Arquitectura y urbanismo*, XXIX (2-3), 84-87. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/3768/376839855015.pdf>
6. Oliva, J. (2007). Ulrich Müther (1934-2007). El maestro constructor de la provincia de Rügen. *Anales del Instituto de Investigaciones Estéticas*, XXIX (90), 273-284. Recuperado de <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=369/36909013>
7. Raynaud, D. (2008). *Arquitectura, esquema, significado*, 24(40), 483-496. <https://www.scielo.br/pdf/vh/v24n40/09.pdf>

Superficies óptimas de diferentes formas geométricas para desmaterializar la producción

8. Donoso Llanos, M. L. (2019). Arquitectura, función simbólica y lenguaje. *Universidad y Sociedad*, 11(4), 409-413. <http://rus.ucf.edu.cu/index.php/rus>
9. Roe, J. (2012). Antoni Gaudí. ProQuest Ebook Central <https://ebookcentral.proquest.com>
10. Sáenz de Cabezón, E. (4 de diciembre del 2015). Matemáticas y diseño: Ejemplos en la arquitectura actual [Archivo de vídeo]. <https://www.youtube.com/watch?v=xozHKS4jm4A>
11. Sanmartín, G., Zhigue Luna, R., y Alaña, T. (2017). El reciclaje: un nicho de innovación y emprendimiento con enfoque ambientalista. *Universidad y Sociedad* [seriada en línea], 9 (1), pp. 36-40. <http://rus.ucf.edu.cu/>
12. Velázquez-Villegas, F., & Santillán-Gutiérrez, S.D. (2013). Optimización de forma de un cuerpo suspendido basada en reglas evolutivas y modelado paramétrico: la forma de un fruto. *Ingeniería, investigación y tecnología*, 14(1), 23-35. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1405-77432013000100003&lng=es&tlng=es.

©2020 por los autores. Este artículo es de acceso abierto y distribuido según los términos y condiciones de la licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-NC-SA 4.0) (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>).